# Matemaatiline analüüs I

Jaan Janno

# Sisukord

# Peatükk 1

# Reaalarvud ja funktsioonid

## 1.1 Reaalarvud ja Arvtelg. Absoluutväärtuse mõiste. Reaalarvudest koosnevad hulgad.

Fikseerime kõigepealt mõned hulkadega seotud tähised. *Hulk* tavalises mõttes on teatud elementide kogum milles elemendid ei kordu ja nende järjestus ei ole kindlaks määratud. Hulga tähistamiseks eraldame vaadeldavad elemendid komadega ja piiritleme hulga loogeliste sulgudega. Näiteks, $\{0, 7, 5\}$ on elementidest 0, 7 ja 5 koosnev hulk. Hulk võib olla antud ka keerulisemal kujul. Näiteks, $\{x^2 \parallel x = 1, 2, 3\}$ on hulk mille elemendid on arvutatavad valemiga $x^2$, kusjuures $x$ võib omandada väärtusi 1, 2 ja 3. Viimase hulga võib muidugi panna kirja ka ekvivalentsel kujul $\{1, 4, 9\}$.

Erinevalt tavalistest hulgadest kasutame edaspidi mõnikord ka *järjestatud hulki* mille iga kahe elemendi kohta on võimalik öelda, kumb neist on eelnev, kumb järgnev. Tavalise hulga ja järjestatud hulga eristamiseks lepime kokku et viimase tähistamisel kasutame loogeliste sulgude asemel ümarsulgi. Peale selle lubame järjestatud hulga elementidel ka korduda. Näiteks, $(-1, 1, -1, 1, \ldots)$ on järjestatud hulk, milles $-1$-le järgneb 1, sellele omakorda $-1$ jne.

Siirdume nüüd ühe matemaatilise analüüsi põhimõiste, nimelt arvu käsitlemise juurde. Kõigepealt defineerime naturaalarvude hulga $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ ja täisarvude hulga $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$.

Täisarvude baasil defineerime ratsionaalarvud. Ratsionaalarvuks nimetatakse kahe täisarvu $p$ ja $q$ jagatist $p/q$, kusjuures $q \neq 0$. Ratsionaalarvude hulga tähis on $\mathbb{Q}$. Seega, lühidalt kirjutades $\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} \parallel p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\}$. Iga ratsionaalarvu saab esitada kas lõpliku või lõpmatu perioodilise kümnendmurruna.

Lõpmatuid mitteperioodilisi kümnendmurde nimetatakse irratsionaalarvudeks. Ratsionaalarvud ja irratsionaalarvud kokku moodustavad reaalarvude hulga. Reaalarvude hulga tähis on $\mathbb{R}$.

**Arvtelje mõiste**. Arvteljeks nimetatakse sirget millel on valitud nullpunkt, pikkusühik ja positiivne suund. Kasutades neid kolme parameetrit saab arvtelje punktidele seada vastavusse reaalarvud. Tõepoolest, nullpunktist ühe ühiku võrra positiivses suunas paikneb punkt mis vastab arvule 1, poole ühiku võrra negatiivses suunas paikneb punkt mis vastab arvule $-1/2$ jne. Võib väita et igale arvtelje punktile vastab üks ja ainult üks reaalarv ja vastupidi: igale reaalarvule vastab üks ja ainult üks arvtelje punkt. Öeldu põhjal saab reaalarvud samastada sirge (arvelje) punktidega.

**Absoluutväärtuse mõiste**. Reaalarvu $a$ absoluutväärtuseks nimetatakse järgmist mittenegatiivset reaalarvu:

$$|a| = \begin{cases} a & \text{kui} \quad a \geq 0 \\ -a & \text{kui} \quad a < 0\,. \end{cases}$$

Reaalarvu $a$ absoluutväärtust $|a|$ võib tõlgendada kui punkti $a$ ja nullpunkti vahelist kaugust arvteljel. Üldisemalt, punktide $a$ ja $b$ vaheline kaugus arvteljel võrdub arvuga $|a-b|$.

**Absoluutväärtuse omadused:**

1. $|-a| = |a|$
2. $|ab| = |a|\,|b|$
3. $|a+b| \leq |a| + |b|$
4. $|a-b| \geq \big|\,|a| - |b|\,\big|$

**Arvu ümbruse mõiste**. Reaalarvu $a$ ümbruseks nimetatakse suvalist vahemikku $(a-\epsilon, a+\epsilon)$, kus $\epsilon > 0$. Märgime et arv $x$ kuulub arvu $a$ ümbrusesse $(a-\epsilon, a+\epsilon)$ siis ja ainult siis kui selle arvu kaugus arvust $a$ on väiksem kui $\epsilon$, s.t. $|x-a| < \epsilon$.

Arvu 0 ümbrus on seega suvaline vahemik $(-\epsilon, \epsilon)$, kus $\epsilon > 0$.

**Tõkestatud hulgad**. Reaalarvudest koosnevat hulka $A$ nimetatakse tõkestatuks kui leidub selline positiivne arv $K$ nii et iga $a \in A$ korral kehtib võrratus $|a| \leq K$. Teiste sõnadega: hulk $A$ on tõkestatud, kui kõik selle hulga elemendid kuuluvad nulli ümbrusesse $(-K, K)$ mingi $K > 0$ korral (st hulk $A$ "mahub" vahemikku $(-K, K)$ mingi $K > 0$ korral).

Tõkestatud hulgad on näiteks vahemik $(a, b)$, lõik $[a, b]$ ja poollõigud $[a, b)$, $(a, b]$ kui $a, b \in \mathbb{R}$ ja $a < b$. Tõkestamata hulgad on aga näiteks lõpmatud vahemikud $(-\infty, a)$, $(a, \infty)$ ja lõpmatud poollõigud $(-\infty, a]$, $[a, \infty)$, kus $a \in \mathbb{R}$.

## 1.2 Jäävad ja muutuvad suurused. Funktsiooni mõiste ja esitusviisid.

**Jäävad ja muutuvad suurused.** Suurust mis võib omandada erinevaid arvulisi väärtusi nimetatakse muutuvaks suuruseks ehk muutujaks. Suurust mille arvuline väärtus ei muutu nimetatakse jäävaks suuruseks.

Näiteks ühtlase liikumise korral on kiirus jääv suurus ja läbitud teepikkus muutuv suurus. Samas, mitteühtlase liikumise korral on ka kiirus muutuv suurus. Nii matemaatikas kui füüsikas on olemas ka suurusi mis igas olukorras on jäävad. Näiteks, ringjoone ümbermõõdu ja läbimõõdu suhe $\pi$, valguse kiirus $c$ jne. Neid suurusi nimetatakse absoluutseteks konstantideks.

**Muutumispiirkonna mõiste.** Muutuva suuruse kõigi võimalike väärtuste hulka nimetatakse selle suuruse muutumispiirkonnaks. Näiteks keha temperatuur võib teoreetiliselt omada kõiki väärtusi mis on suuremad või võrdsemad kui absoluutne miinimum $-372°C$. Seega on temperatuuri muutumispiirkond lõpmatu poollõik $[-372, \infty)$.

**Funktsiooni mõiste.** Olgu antud 2 muutuvat suurust $x$ ja $y$. Funktsiooniks (ehk üheseks funktsiooniks) nimetatakse kujutist mis seab suuruse $x$ igale väärtusele tema muutumispiirkonnast vastavusse suuruse $y$ ühe kindla väärtuse. Muutujat $x$ nimetatakse seejuures sõltumatuks muutujaks ehk argumendiks ja muutujat $y$ sõltuvaks muutujaks.

Funktsioone tähistatakse tavaliselt tähtedega $f, g, u, v, \varphi, \psi$ jne.

Olgu antud funktsioon $f$ mille argumendiks on $x$ ja sõltuvaks muutujaks $y$. Muutuja $y$ väärtust milleks funktsioon $f$ kujutab argumendi $x$ nimetatakse funktsiooni $f$ väärtuseks kohal $x$ ja tähistatakse sümboliga $f(x)$. Seega, me võime kirjutada seose

$$y = f(x), \tag{1.1}$$

mis väljendab muutuja $y$ "seotust" argumendiga $x$ funktsiooni $f$ kaudu. Mõnikord kasutatakse funktsiooni ja sõltuva muutuja tähistamiseks ühte ja sama sümbolit. Sellisel juhul seos (1.1) omab kuju $y = y(x)$.

Argumendi $x$ muutumispiirkonda nimetatakse funktsiooni $f$ määramispiirkonnaks. Määramispiirkonna tähisena kasutame edaspidi sümbolit $X$. Hulka

$$Y = \{f(x) \,||\, x \in X\}$$

nimetatakse funktsiooni $f$ väärtuste hulgaks.

**Mitmeseks funktsiooniks** nimetatakse kujutist mis seab suuruse $x$ igale väärtusele tema muutumispiirkonnast vastavusse teatud hulga suuruse $y$ väärtusi, kusjuures leidub vähemalt üks $x$ väärtus millele vastab mitu $y$ väärtust. Argumendi, sõltuva muutuja, määramispiirkonna ja väärtuste hulga mõisted on mitmese funktsiooni korral analoogilised vastavate mõistetega ühese funktsiooni korral.

Käesolevas konspektis tähendab mõiste "funktsioon" ilma täiendita "mitmene" alati ühest funktsiooni.

**Funktsiooni esitusviisid.**

1. *Esitusviis tabeli kujul.* Funktsiooni argumendi võimalikud väärtused esitatakse tabeli ühes reas (veerus) ja neil vastavad funktsiooni väärtused tabeli teises reas (veerus). On võimalik vaid siis kui funktsiooni argumendil on lõplik arv väärtusi.

2. *Analüütiline esitusviis.* Funktsioon esitatakse valemi kujul. Kui vaja, lisatakse ka määramispiirkonna kirjeldus. Näiteks avaldis

$$y = x^2 , \quad x \in [0, 1]$$

   kirjeldab funktsiooni mille määramispiirkonnaks on lõik $[0, 1]$ ja iga $x$ korral sellelt lõigult arvutatakse argumendile $x$ vastavad funktsiooni väärtused $f(x)$ vastavalt valemile $f(x) = x^2$.

   Analüütiliselt antud funktsiooni *loomulikuks määramispiirkonnaks* nimetatakse argumendi kõigi nende väärtuste hulka mille korral on funktsiooni avaldis täielikult määratud.

3. *Graafiline esitusviis.* Funktsioon esitatakse graafikuna tasandil ristkoordinaadistikus. Olgu antud funktsioon $f$, mille argument on $x$, sõltuv muutuja $y$ ja määramispiirkond $X$. Kanname tasandile ristuvad $x$- ja $y$-teljed. Vaatleme selles teljestikus joont $G$, mis koosneb kõikvõimalikest punktidest $P = (x, f(x))$, kusjuures $P$ esimene koordinaat $x$ jookseb läbi kogu määramispiirkonna $X$. Seda joont nimetataksegi funtsiooni $f$ *graafikuks.* Seega, lühidalt kirjutades on funktsiooni $f$ graafiku definitsioon järgmine:

$$G = \{P = (x, f(x)) \,||\, x \in X\} .$$

   Punkti $P$ teist koordinaati $f(x)$ võib tõlgendada $P$ "kõrgusena" $x$- telje suhtes. Kui $f(x) > 0$ siis on graafiku "kõrgus" positiivne, st graafik paikneb ülapool $x$-telge. Kui aga $f(x) < 0$ siis on "kõrgus" negatiivne, st graafik jääb $x$-teljest allapoole.

   Kuna $xy$-teljestikus antud punkti üldkuju on $P = (x, y)$, funktsiooni $f$ graafik koosneb aga punktidest $P = (x, f(x))$, siis rahuldavad graafiku punktid võrrandit $y = f(x)$.

   Suvaline $y$-teljega paralleelne sirge saab funktsiooni graafikut lõigata maksimaalselt ühes punktis. See omadus tuleneb otseselt funktsiooni ühesusest. Juhul kui vaadeldav funktsioon on mitmene siis eksisteerib vähemalt üks $y$-teljega paralleleelne sirge mis lõikab funktsiooni graafikut mitmes punktis.

## 1.3 Funktsioonide liigid. Konstantne funktsioon. Astme-, eksponent- ja trigonomeetrilised funktsioonid.

**Paaris- ja paaritud funktsioonid.** Funktsiooni $f$ nimetatakse paarisfunktsiooniks kui iga $x \in X$ korral kehtib võrdus $f(-x) = f(x)$. Funktsiooni

$f$ nimetatakse paarituks funktsiooniks kui iga $x \in X$ korral kehtib võrdus $f(-x) = -f(x)$.

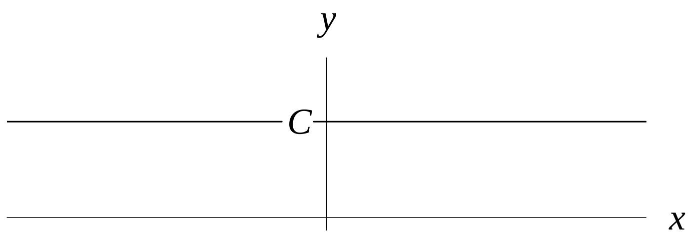
**Perioodilised funktsioonid.** Funktsiooni $f$ nimetatakse perioodiliseks kui leidub konstant $C > 0$ nii et iga $x \in X$ korral kehtib võrdus $f(x + C) = f(x)$. Väikseimat sellist arvu $C$ nimetatakse funktsiooni $f$ perioodiks.

**Kasvavad ja kahanevad funktsioonid.** Olgu $D$ funktsiooni $f$ määramispiirkonna alamhulk. Valime hulgast $D$ kaks suvalist arvu $x_1$ ja $x_2$ nii et kehtib võrratus $x_1 < x_2$.

Kui funktsiooni $f$ rakendamisel argumentidele $x_1$ ja $x_2$ võrratuse märk ei muutu, st $f(x_1) < f(x_2)$, siis $f$ on kasvav hulgas $D$. Kui aga funktsiooni $f$ rakendamisel argumentidele $x_1$ ja $x_2$ võrratuse märk muutub vastupidiseks st $f(x_1) > f(x_2)$, siis $f$ on kahanev hulgas $D$. Kasvamispiirkonnas funktsiooni graafik tõuseb, kahanemispiirkonnas aga langeb.

**Konstantne funktsioon. Astme- ja eksponent- ja trigonomeetrilised funktsioonid.** Käesolevas alamparagrahvis alustame põhiliste elementaarfunktsioonide loetlemist ja omaduste kirjeldamist.

*Konstantne funktsioon* $y = C$. Ilmselt $X = \mathbb{R}$ ja $Y = \{C\}$. Graafik:




Joonis 1.1: konstantne funktsioon $y = C$

*Astmefunktsioon* $y = x^a$, kus $a$ on nullist erinev konstantne astendaja. Selle funktsiooni määramispiirkond, väärtuste hulk ja graafik sõltuvad oluliselt $a$-st. Piirdume siinkohal ainult määramispiirkonna kirjeldamisega.

a) $a = p/q$, kus $p, q \in \mathbb{Z}$ ja $q$ on paaritu. Kui $a > 0$ siis $X = \mathbb{R}$. Kui $a < 0$ siis $X = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

b) $a = p/q$, kus $p, q \in \mathbb{Z}$ ja $q$ on paaris või $a$ on irratsionaalarv. Kui $a > 0$ siis $X = [0, \infty)$. Kui $a < 0$ siis $X = (0, \infty)$.

*Eksponentfunktsioon* $y = a^x$ astme alusega $a$, mis rahuldab võrratusi $a > 0$ ja $a \neq 1$. Antud funktsiooni korral $X = \mathbb{R}$ ja $Y = (0, \infty)$. Graafik on juhtudel

$a > 1$ ja $0 < a < 1$ kvalitatiivselt erinev (joonised 1.2 ja 1.3 tagapool). Nagu graafikutelt nähtub, on $y = a^x$ kasvav kogu oma määramispiirkonnas kui $a > 1$ ja kahanev kogu oma määramispiirkonnas kui $0 < a < 1$.

*Trigonomeetrilised funktsioonid* $y = \sin x$, $y = cosx$, $y = \tan x$ ja $y = \cot x$ radiaanides antud argumendiga $x$.

Funktsioon $\cos\alpha$ on defineeritud kui $x$-telje suhtes nurga $\alpha$ all paikneva tasandilise vektori $x$-koordinaadi suhe tema pikkusesse ja $\sin\alpha$ kui taolise vektori $y$-koordinaadi suhe tema pikkusesse. Kraadides antud nurga teisendamisel radiaanidesse kehtib seos 180 kraadi $= \pi$ radiaani. Funktsioonid $\sin\alpha$ ja $\cos\alpha$ on lõigult $\alpha \in [0, 2\pi]$ jätkatud perioodiliselt kogu arveljele. Funktsioonid $\tan\alpha$ ja $\cot\alpha$ on defineeritud valemitega $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ ja $\cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha}$.

Trigonometriliste funktsioonide määramispiirkonnad ja väärtuste hulgad on järgmised:

$$\begin{aligned}
y = \sin x :& \quad X = \mathbb{R},\, Y = [-1, 1]\,,\\
y = \cos x :& \quad X = \mathbb{R},\, Y = [-1, 1]\,,\\
y = \tan x :& \quad X = \mathbb{R} \setminus \{\frac{(2k+1)}{2}\pi \,||\, k \in \mathbb{Z}\},\, Y = \mathbb{R}\,,\\
y = \cot x :& \quad X = \mathbb{R} \setminus \{k\pi \,||\, k \in \mathbb{Z}\},\, Y = \mathbb{R}\,.
\end{aligned}$$

Graafikud leiab lugeja joonistelt 1.6 - 1.9 tagapool. Funktsioonid $y = \sin x$ ja $y = \cos x$ on perioodilised perioodiga $2\pi$ ning $y = \tan x$ ja $y = \cot x$ perioodiga $\pi$. Funktsioonid $y = \sin x$, $y = \tan x$ ja $y = \cot x$ on paaritud ning $y = \cos x$ paaris.

## 1.4 Pöördfunktsiooni mõiste. Logaritmfunktsioon. Arkusfunktsioonid.

**Üksühese funktsiooni mõiste.** Olgu antud funktsioon $y = f(x)$. Vastavalt definitsioonile on funktsioon $f$ kujutis mis seab igale argumendi $x$ väärtusele oma määramispiirkonnast vastavusse ühe kindla $y$ väärtuse. Eeldame funktsiooni $f$ kohta rohkemat. Nimelt olgu ka argument $x$ funktsiooni väärtuse $f(x)$ kaudu üheselt määratud. See tähendab et iga $y$ korral hulgast $Y$ leidub ainult üks $x$ nii et valitud $y$ on selle $x$-i kujutiseks. Kui see on nii siis öeldakse et funktsioon $f$ on *üksühene*. Üksühese funktsiooni korral on võrrand $y = f(x)$ muutuja $x$ suhtes üheselt lahenduv.

Näiteks funktsioon $y = x^3$ on üksühene. Iga $y$ korral leidub ainult üks $x$ nii valitud $y$ on selle $x$-i kuup. Arv 8 on ainult ühe arvu (so 2) kuup, arv $-27$ on ainult ühe arvu (so $-3$) kuup jne. Lahendades võrrandi $y = x^3$ muutuja $x$ suhtes saame argumendi $x$ esituse $y$ kaudu: $x = \sqrt[3]{y}$. Seevastu funktsioon $y = x^2$ ei ole üksühene. Iga $y > 0$ korral leidub kaks $x$-i nii et valitud $y$ on mõlema $x$-i ruut. Arv 4 nii $-2$ kui 2 ruut. Võrrandi $y = x^2$ lahendamisel saame kaks funktsiooni $x = \sqrt{y}$ ja $x = -\sqrt{y}$ ehk ühe mitmese funktsiooni $x = \pm\sqrt{y}$.

Kui suvaline $x$-teljega paralleelne sirge läbib funktsiooni graafikut maksimaalselt ühes punktis, siis on see funktsioon üksühene.

**Üksühese funktsiooni pöördfunktsioon.** Üksühese funktsiooni $y = f(x)$ pöördfunktsiooniks nimetatakse kujutist mis seab igale $f(x)$-le funktsiooni $f$ väärtuste hulgast vastavusse $x$-i. Pöördfunktsiooni avaldise saame kui lahendame võrrandi $y = f(x)$ muutuja $x$ suhtes. Kui funktsiooni $f$ argumendiks on $x$ ja sõltuvaks muutujaks $y$ siis $f$-i pöördfunktsiooni argumendiks on $y$ ja sõltuvaks muutujaks $x$.

Olgu $x = g(y)$ üksühese funktsiooni $y = f(x)$ pöördfunktsioon. Siis funktsioonid $f$ ja $g$ kompenseerivad teineteist järgmises mõttes: Fikseerime mingi $x$ väärtuse ja arvutame $f(x)$. Seejärel arvutame $g[f(x)]$, st funktsioon $g$ kohal $f(x)$. Tulemusena saame esialgse $x$ väärtuse tagasi. Samuti arvutades antud $y$ kaudu $g(y)$ ja $f[g(y)]$ saame $y$ väärtuse tagasi. Need seosed saab kirjutada kujul:

$$g[f(x)] = x\,, \quad f[g(y)] = y\,. \tag{1.2}$$

Kui $g$ of funktsiooni $f$ pöördfunktsiooni siis $f$ on $g$ pöördfunktsioon.

Funktsiooni $y = f(x)$ ja tema pöördfunktsiooni $x = g(y)$ graafikud kattuvad $xy$-teljestikus. Kui aga pöördfunktsiooni $x = g(y)$ avaldises muutujate $x$ ja $y$ kohad vahetada, st esitada ta kujul $y = g(x)$, siis funktsioonide $y = f(x)$ ja $y = g(x)$ graafikud on sümmeetrilised sirge $y = x$ suhtes.

**Logaritmfunktsioon. Arkusfunktsioonid.** Jätkame eelmises paragrahvis alustatud põhiliste elementaarfunktsioonide loetelu mõnede oluliste pöördfunktsioonidega.

*Logaritmfunktsioon.* Suvaline $x$-teljega paralleelne sirge läbib eksponentfunktsiooni $y = a^x$ graafikut maksimaalselt ühes punktis (vt joonised 1.2, 1.3), seega on see funktsioon üksühene. Eksponentfunktsiooni $y = a^x$ pöördfunktsioon on logaritmfunktsioon $x = \log_a y$ logaritmi alusega $a$. Nii nagu eksponentfunktsioonikorral eeldatakse et $a > 0$ või $a \neq 1$. Vastavalt valemitele (1.2) kehtivad seosed $\log_a[a^x] = x$ ja $a^{\log_a y} = y$.

Funktsiooni $y = \log_a x$ määramispiikond ja väärtuste hulk on vastavalt $X = (0, \infty)$ ja $Y = \mathbb{R}$. Jällegi sõltub graafik oluliselt sellest kas $a > 1$ või $0 < a < 1$ (joonised 1.4 ja 1.5). Võrreldes graafikuid joonistel 1.2, 1.3, 1.4 ja 1.5 näeme et $y = \log_a x$ graafik on $y = a^x$ graafiku peegeldus sirge $y = x$ suhtes.

*Arkusfunktsioonid.* Trigonomeetriliste funktsioonide pöördfunktsioonid on nn. arkusfunktsioonid. Peamine probleem trigonomeetrilste funktsioonide pööramisel on see et nad ei ole üksühesed. Seetõttu defineeritakse pöördfunktsioonid nende funktsioonide ahenditel (määramispiirkondade alamhulkadel).

Funktsioon $y = \sin x$ ei ole üksühene sest ühele $\sin x$ väärtusele vastab lõpmata palju $x$ väärtusi. Näiteks $x$-telg lõikab siinuse graafikut lõpmata arvus erinevates punktides (vt joonis 1.6). Funktsiooni $y = \sin x$ pööramisel ahendatakse tema määramispiirkond lõiguks $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, st jäetakse vaatluse alt välja kogu see $\sin x$ osa mille korral $x$ ei kuulu sellele lõigule. Lõigul $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ paiknevat siinuse graafiku osa lõikab suvaline $x$-teljega paralleelne sirge maksimaalselt ühes punktis, seega seal on see funktsion üksühene. Funktsiooni $y = \sin x$, $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ pöördfunktsiooni nimetatakse arkussiinuseks ja tähistatakse $x = \arcsin y$.

Kehtivad seosed $\arcsin[\sin x] = x$ ja $\sin[\arcsin y] = y$, neist esimene iga $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ korral.

Funktsiooni $y = \cos x$, mis ei ole samuti üksühene kogu arvteljel, pööramisel ahendatakse tema määramispiirkond lõiguks $[0, \pi]$. Sellel lõigul on ta üksühene (joonis 1.7). Funktsiooni $y = \cos x$, $x \in [0, \pi]$ pöördfunktsioon kannab nimetust arkuskosinus ja tähistatakse $x = \arccos y$. Kehtivad valemid $\arccos[\cos x] = x$ ja $\cos[\arccos y] = y$, neist esimene iga $x \in [0, \pi]$ korral.

Funktsioonide $y = \tan x$ ja $y = \cot x$ pööramisel ahendatakse $\tan x$ vahemikule $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ ja $\cot x$ vahemikule $(0, \pi)$. Funktsioonide $y = \tan x$, $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ ja $y = \cot x$, $x \in (0, \pi)$ pöördfunktsioonid on vastavalt arkustangens $x = \arctan y$ ja arkuskotangens $x = \operatorname{arccot} y$. Kehtivad valemid $\arctan[\tan x] = x$, $\tan[\arctan y] = y$, $\operatorname{arccot}[\cot x] = x$ ja $\cot[\operatorname{arccot} y] = y$, neist esimene iga $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ ja kolmas iga $x \in (0, \pi)$ korral.

Arkusfunktsioonide määramispiirkonnad ja väärtuste hulgad on järgmised:

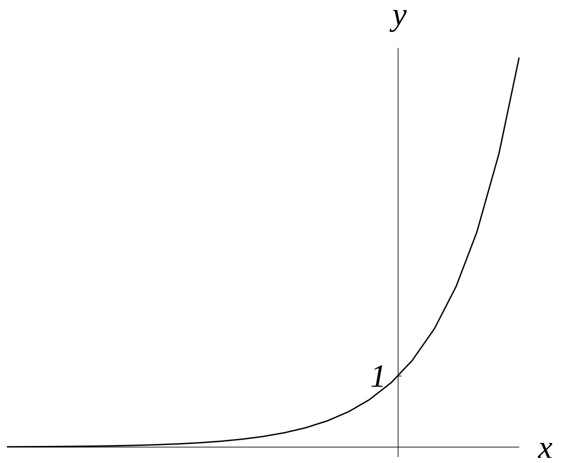
$$\begin{aligned}
y = \arcsin x &: \quad X = [-1, 1],\, Y = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]\,, \\
y = \arccos x &: \quad X = [-1, 1],\, Y = [0, \pi]\,, \\
y = \arctan x &: \quad X = \mathbb{R},\, Y = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})\,, \\
y = \operatorname{arccot} x &: \quad X = \mathbb{R},\, Y = (0, \pi)\,.
\end{aligned}$$

Graafikud on kujutatud joonistel 1.10 - 1.13.

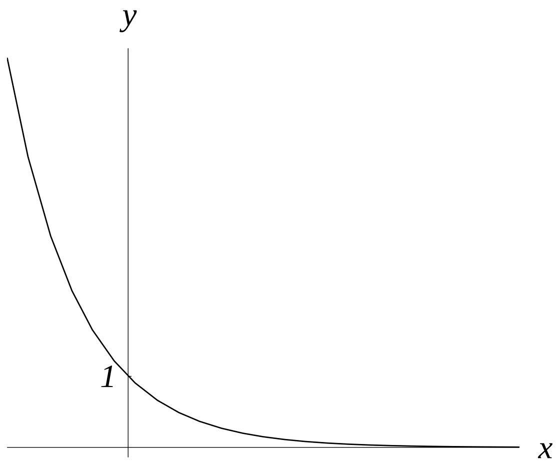
**Pöördfunktsioon funktsioonist mis ei ole üksühene.** Olgu vaadeldav funktsioon $y = f(x)$ oma määramispiirkonnaga $X$ ja väärtuste hulgaga $Y$ küll ühene kuid mitte üksühene. Funktsiooni $f$ pöördfunktsiooniks nimetatakse kujutist mis igale $y \in Y$ seab vastavusse kõigi selliste $x \in X$ hulga mille korral kehtib võrdus $f(x) = y$.

Ühese kuid mitte üksühese funktsiooni pöördfunktsioon on mitmene. Selliste funktsioonide näideteks on terves oma määramispiirkonnas antud trigonomeetriliste funktsioonide pöördfunktsioonid ehk "suure algustähega" arkusfunktsioonid. Näiteks tervel reaalarvude hulgal $\mathbb{R}$ antud funktsiooni $y = \sin x$ pöördfunktsioon on $x = \operatorname{Arcsin} y$.

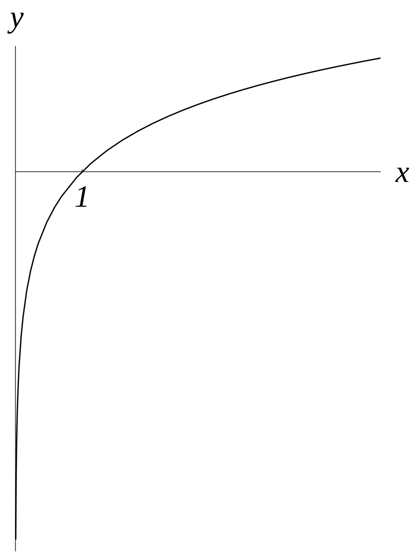
Arvutame $\operatorname{Arcsin} 0$. Kuna kõigi selliste $x$ hulk, mille korral $\sin x$ võrdub nulliga, on $\{k\pi \,||\, k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$, siis saamegi $\operatorname{Arcsin} 0 = \{k\pi \,||\, k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$.



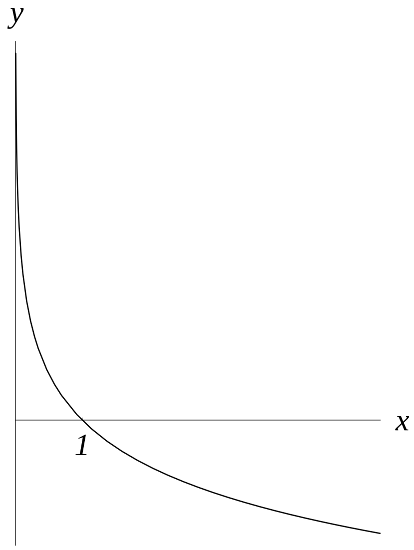

Joonis 1.2: $y = a^x$ kui $a > 1$



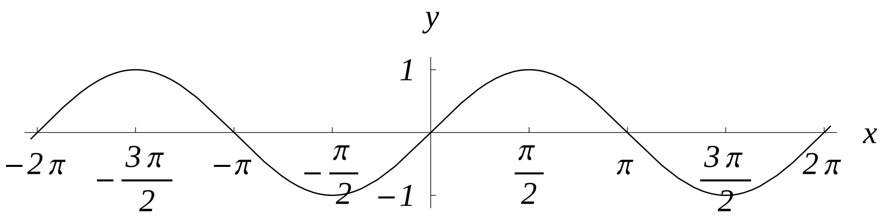

Joonis 1.3: $y = a^x$ kui $0 < a < 1$



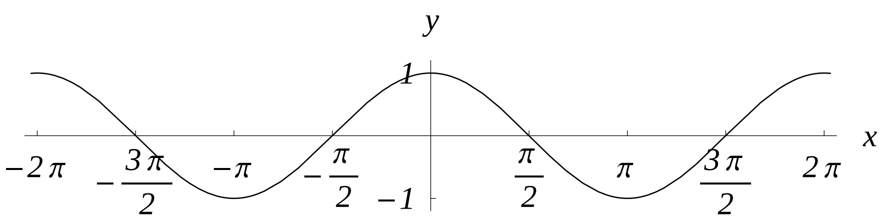

Joonis 1.4: $y = \log_a x$ kui $a > 1$



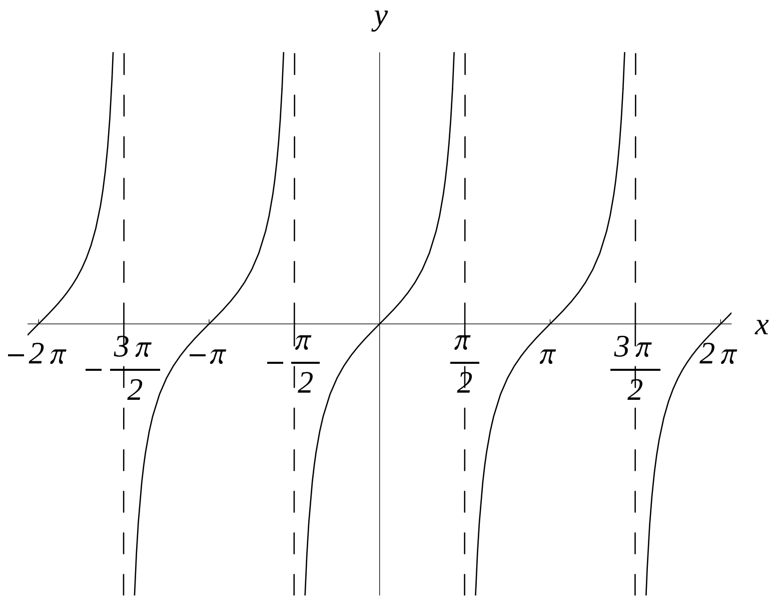

Joonis 1.5: $y = \log_a x$ kui $0 < a < 1$



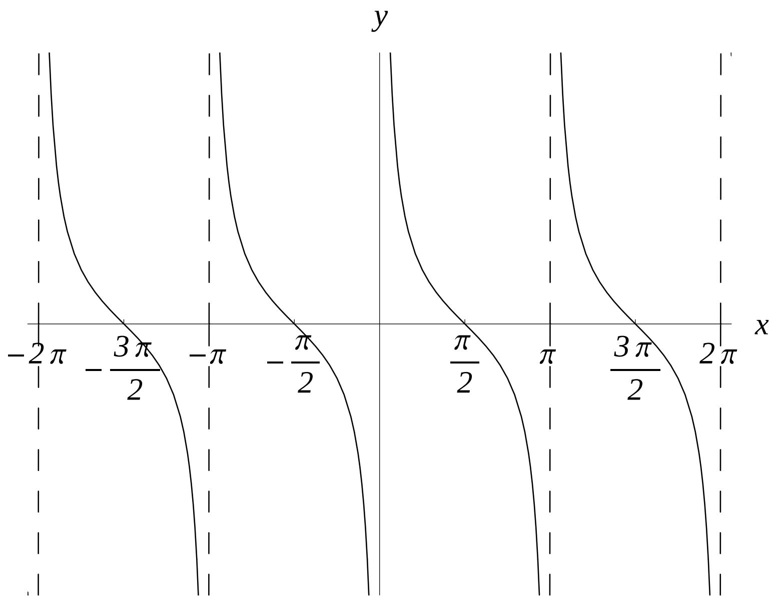

Joonis 1.6: $y = \sin x$



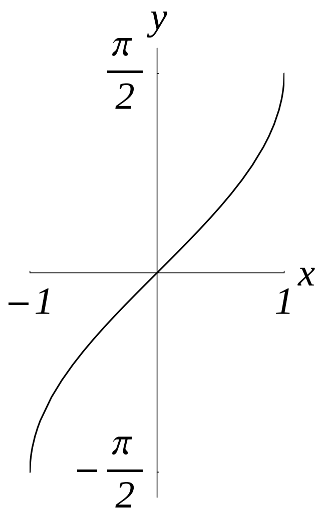

Joonis 1.7: $y = \cos x$



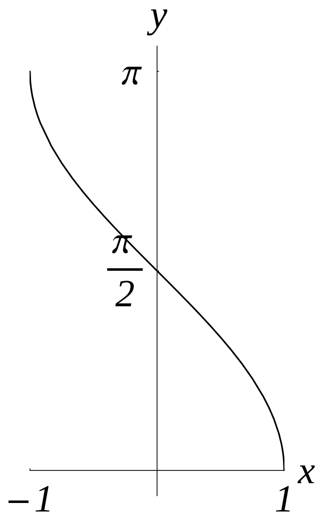

Joonis 1.8: $\quad y = \tan x$



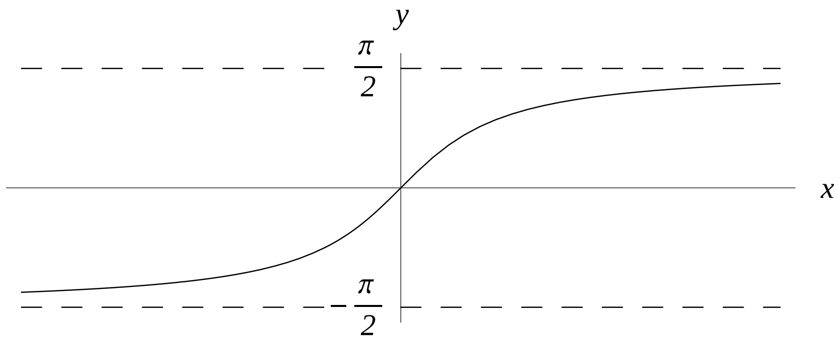

Joonis 1.9: $\quad y = \cot x$



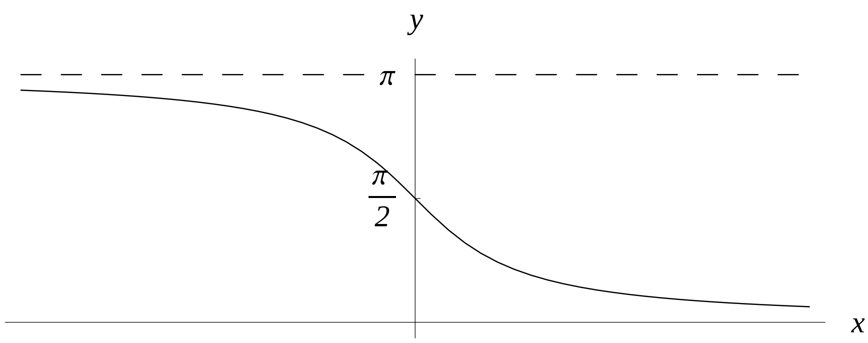

Joonis 1.10: $y = \arcsin x$




Joonis 1.11: $y = \arccos x$




Joonis 1.12: $y = \arctan x$




Joonis 1.13: $y = \operatorname{arccot} x$

## 1.5 Tehted funktsioonidega. Elementaarfunktsioon. Polünoom ja ratsionaalfunktsioon.

**Algebralised tehted funktsioonidega**. Olgu antud kaks funktsiooni $y = f(x)$ ja $y = g(x)$ ühise määramispiirkonnaga $X$. Funktsioonide $f$ ja $g$ summa on defineeritud kui kujutis mis seab igale $x \in X$ vastavusse muutuja $y$ väärtuse valemiga $y = f(x) + g(x)$. Funktsioonide $f$ ja $g$ summa loomulik tähis on $f + g$. Seega kehtib $f$ ja $g$ summa puhul seos $y = (f + g)(x) = f(x) + g(x)$. Analoogiliselt defineeritakse ka funktsioonide $f$ ja $g$ vahe $y = (f - g)(x) = f(x) - g(x)$, korrutis $y = (fg)(x) = f(x)g(x)$ ja jagatis $y = (f/g)(x) = f(x)/g(x)$. Summa, vahe ja korrutise määramispiirkonnaks on $X$. Jagatise määramispiirkond koosneb kõigist sellistest $x \in X$ mille korral $g(x) \neq 0$.

**Liitfunktsiooni mõiste.** Olgu antud kaks funktsiooni: $y = f(x)$ määramispiirkonnaga $X_f$ ja $z = g(y)$ määramispiirkonnaga $Y_g$. Asendades suuruse $y$ funktsiooni $g$ avaldises $f(x)$-ga saame uue funktsiooni mille argumendiks on $x$ ja sõltuvaks muutujaks $z$, kusjuures $x$ ja $z$ vaheline seos on antud kujul $z = g[f(x)]$. Tegemist on funktsioonide $f$ ja $g$ baasil defineeritud liitfunktsiooniga. Tähistame seda funktsiooni sümboliga $g \circ f$. Seega võime kirjutada võrduse $z = (g \circ f)(x) = g[f(x)]$. Liitfunktsiooni $g \circ f$ määramispiirkond on järgmine $X_f$ alamhulk:

$$X_{g\circ f} = \{x \,||\, x \in X_f,\ f(x) \in Y_g\}\,.$$

Näiteks annavad $f(x) = \sin x$ ja $g(y) = \sqrt{y}$ liitfunktsiooni $(g \circ f)(x) = \sqrt{\sin x}$. Kuna $X_f = \mathbb{R}$ ja $Y_g = [0, \infty)$, siis $X_{g\circ f} = \{x \,||\, \sin x \in [0, \infty)\} = \{x \,||\, 2k\pi \leq x \leq (2k + 1)\pi,\ k \in \mathbb{Z})\}$.

**Elementaarfunktsiooni mõiste.** Põhiliste elementaarfunktsioonide hulka loetakse kokkuleppeliselt konstantne funktsioon ja funktsioonid $y = x^a$, $y = a^x$, $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \tan x$, $y = \cot x$, $y = \log_a x$, $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \arctan x$ ning $y = \operatorname{arccot} x$. Elementaarfunktsiooniks nimetatakse funktsiooni, mis on saadud põhilistest elementaarfunktsioonidest lõpliku arvu liitmiste, lahutamiste, korrutamiste, jagamiste ja liitfunktsioonide moodustamise teel.

Näiteks on $y = \sqrt{2^{\arccos x} + \frac{3}{\tan^2 x} - 4}$ elementaarfunktsioon. Antud funktsioon on saadud põhilistest elemetaarfunktsioonidest $y = 3$, $y = 4$, $y = x^{1/2}$, $y = x^2$, $y = 2^x$, $y = \tan x$ ja $y = \arccos x$ lõpliku arvu liitmiste, lahutamiste, korrutamiste, jagamiste ja liitfunktsioonide moodustamise teel.

Elementaarfunktsioonide hulka kuuluvad polünoomid ja ratsionaalfunktsioonid. $n$- astme polünoom on defineeritud avaldisega

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n\,,$$

kus $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$ on konstandid ja $a_n \neq 0$. Ratsionaalfunktsioon on kahe polünoomi jagatis

$$R(x) = \frac{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n}{b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots + b_{m-1}x^{m-1} + b_mx^m}\,.$$

Kõik funktsioonid ei ole elementaarfunktsioonid. Näiteks ei ole elementaarfunktsioon nn Heaviside'i funktsioon, mis on defineeritud järgmise eeskirjaga:

$$\Theta(x) = \begin{cases} 1 & \text{kui } x \geq 0, \\ 0 & \text{kui } x < 0. \end{cases}$$

## 1.6 Ilmutatud ja ilmutamata funktsioonid. Parameetrilisel kujul antud jooned ja funktsioonid.

**Ilmutatud ja ilmutamata funktsioonid.** Analüütiliselt antud funktsioon võib olla kas ilmutatud või ilmutamata kujul. Funktsiooni $y = f(x)$ ilmutatud kujuks on võrrand, mille vasakul pool on $y$ ja paremal pool avaldis, mis võib sisaldada muutujat $x$ kuid mitte muutujat $y$. Näiteks $y = x^2 - x$.

Funktsiooni $y = f(x)$ ilmutamata kujuks on võrrand mis sisaldab $x$ ja $y$ läbisegi, st võrrand

$$F(x, y) \;=\; 0\,, \tag{1.3}$$

kus $F$ on mingi $x$ ja $y$ sisaldav avaldis. Näiteks $x^2 - \sin y + y = 0$.

Kui me asendame muutuja $y$ funktsiooni $f(x)$ ilmutatud avaldisega võrrandis (1.3) siis muutub see võrrand samasuseks $F(x, f(x)) \equiv 0$.

Ilmutamata kujul antud funktsiooni ilmutamiseks tuleb lahendada võrrand (1.3) muutuja $y$ suhtes. Kui sellel võrrandil on mitu lahendit siis defineerib ta ka mitu funktsiooni.

**Näide.** Vaatleme võrrandit

$$x^2 + y^2 \;=\; 1\,. \tag{1.4}$$

Kui me lahendame selle võrrandi $y$ suhtes saame kaks funktsiooni: $y = -\sqrt{1 - x^2}$ ja $y = \sqrt{1 - x^2}$. Seega määrab võrrand (1.4) ilmutamata kujul kaks erinevat funktsiooni. Asendades kas $y = -\sqrt{1 - x^2}$ või $y = \sqrt{1 - x^2}$ võrrandisse (1.4) saame võrduse $x^2 + [\sqrt{1 - x^2}]^2 = 1$, mis peale lihtsustamist muutub samasuseks $0 \equiv 0$.

**Parameetriliselt antud joon**. Olgu lõigul $[T_1, T_2]$ antud kaks funktsiooni $x = \varphi(t)$ ja $y = \psi(t)$. Kirjutame need funktsioonid üles süsteemina

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t)\,,\; t \in [T_1, T_2]\,. \end{cases} \tag{1.5}$$

Süsteem (1.5) määrab iga $t \in [T_1, T_2]$ korral ühe kindla arvupaari ehk tasandi punkti ristkoordinaatidega $(x, y) = (\varphi(t), \psi(t))$. Üldiselt vastavad muutuja $t$ erinevatele väärtustele ka erinevad tasandi punktid. Kui muutuja $t$ jookseb läbi kogu lõigu $[T_1, T_2]$ siis $t$-le vastav punkt kujundab tasandil teatud joone.

Võrrandeid (1.5) nimetatakse selle joone *parameetrilisteks võrranditeks* ja muutujat $t$ selle joone *parameetriks.*

**Näide.** Vaatleme joont

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t\,,\ \ t \in [0, 2\pi]\,, \end{cases} \tag{1.6}$$

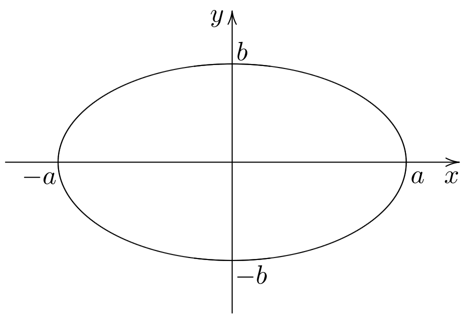
kus $a$ ja $b$ on positiivsed konstandid. Arvutame

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \;=\; \frac{(a\cos t)^2}{a^2} + \frac{(b\sin t)^2}{b^2} \;=\; (\cos t)^2 + (\sin t)^2 \;=\; 1\,.$$

Järelikult on vaadeldava joone võrrand $x$ ja $y$ kaudu esitatuna järgmine:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \;=\; 1\,.$$

Seda joont nimetatakse ellipsiks (joonis 1.14), arve $a$ ja $b$ aga ellipsi pooltelgedeks.




Joonis 1.14

**Parameetrilisel kujul antud funktsioon.** Olgu antud joon parameetriliste võrranditega

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t)\,,\ \ t \in [T_1, T_2]\,. \end{cases} \tag{1.7}$$

Eeldame et funktsioon $x = \varphi(t)$ on üksühene. Sellest järeldub, et muutuja $t$ saab muutuja $x$ kaudu avaldada valemiga

$$t \;=\; \omega(x)\,,$$

kus $\omega$ on funktsiooni $\varphi$ pöördfunktsioon. Asendades muutuja $t$ suurusega $\omega(x)$ süsteemi (1.7) teises võrrandis tekib järgmine funktsioon, mille argumendiks on $x$ ja sõltuvaks muutujaks $y$:

$$y \;=\; f(x) \;=\; \psi[\omega(x)]\,. \tag{1.8}$$

Võrrandeid (1.7) nimetatakse funktsiooni (1.8) parameetrilisteks võrranditeks. Võrranditega (1.7) antud joon on ühtlasi funktsiooni (1.8) graafikuks.

Näiteks vaatleme parameetrilist joont (1.6). Funktsioon $x = a\cos t$ ei ole üksühene tervel lõigul $[0, 2\pi]$. Küll on ta üksühene alamlõigul $[0, \pi]$. Seal on tema pöördfunktsioon $t = \arccos\frac{x}{a}$. Asendades muutuja $t$ avaldisega $\arccos\frac{x}{a}$ süsteemi (1.6) teises võrrandis saame funktsiooni $y = b\sin\left[\arccos\frac{x}{a}\right]$, mille argument on $x$ ja sõltuv muutuja $y$. Arvestades, et $\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha}$ ja $\cos(\arccos x) = x$, saame selle funktsiooni avaldist lihtsustada:

$$y = b\sin\left[\arccos\frac{x}{a}\right] = b\sqrt{1-\cos^2\left[\arccos\frac{x}{a}\right]} = b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}} = \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}. \quad (1.9)$$

Järelikult on võrrandid

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t\,, \ \ t \in [0, \pi] \end{cases}$$

funktsiooni $y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$ parameetrilised võrrandid. Funktsiooni $y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$ graafikuks on joonisel 1.14 toodud ellipsi ülemine ($x$-telje peal asuv) kaar, mis vastab parameetri väärtustele $t \in [0, \pi]$. Märgime, et alumine kaar on funktsiooni $y = -\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$ graafik.

## 1.7 Hüperboolsed trigonomeetrilised funktsioonid.

Selles paragrahvis defineerime veel mõned olulised elementaarfunktsioonid. Matemaatikas ja tema rakendustes kasutatakse palju nn *hüperboolseid trigonomeetrilisi funktsioone.* Nendeks on

$$\begin{aligned}
\sinh x &= \frac{e^x - e^{-x}}{2} && - \text{ hüperboolne siinus}\,,\\
\cosh x &= \frac{e^x + e^{-x}}{2} && - \text{ hüperboolne kosinus}\,,\\
\tanh x &= \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} && - \text{ hüperboolne tangens}\,,\\
\coth x &= \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} && - \text{ hüperboolne kotangens}\,.
\end{aligned}$$

Määramispiirkonnad ja väärtuste hulgad on järgmised:

$$\begin{aligned}
y = \sinh x &: \quad X = \mathbb{R},\ Y = \mathbb{R}\,,\\
y = \cosh x &: \quad X = \mathbb{R},\ Y = [1, \infty)\,,\\
y = \tanh x &: \quad X = \mathbb{R},\ Y = (-1, 1)\,,\\
y = \coth x &: \quad X = \mathbb{R}\setminus\{0\},\ Y = (-\infty, -1)\cup(1, \infty)\,.
\end{aligned}$$

Graafikud on toodud joonistel 1.16 - 1.19.

Hüperboolse siinuse ja kosinuse kaudu on defineeritud veel

$$\begin{aligned}
\operatorname{sech} x &= \frac{1}{\cosh x} = \frac{2}{e^x + e^{-x}} && - \text{ hüperboolne seekant}: \ X = \mathbb{R},\ Y = (0, 1]\\
\operatorname{csch} x &= \frac{1}{\sinh x} = \frac{2}{e^x - e^{-x}} && - \text{ hüperboolne koseekant}: \ X = \mathbb{R}\setminus\{0\},\ Y = \mathbb{R}\setminus\{0\}.
\end{aligned}$$

Funktsioonide $\sinh x$, $\cosh x$, $\tanh x$ ja $\coth x$ pöördfunktsioonid on nn areafunktsioonid:

$$\begin{aligned}
x &= \operatorname{arsinh} y &&- \text{ areasiinus (funktsiooni } y = \sinh x \text{ pöördfunktsioon)}\,,\\
x &= \operatorname{arcosh} y &&- \text{ areakosinus (funktsiooni } y = \cosh x \text{ pöördfunktsioon)}\,,\\
x &= \operatorname{artanh} y &&- \text{ areatangens (funktsiooni } y = \tanh x \text{ pöördfunktsioon)}\,,\\
x &= \operatorname{arcoth} y &&- \text{ areakotangens (funktsiooni } y = \coth x \text{ pöördfunktsioon)}\,.
\end{aligned}$$

Nii nagu hüperboolsed trigonomeetrilised funktsioonid, on ka areafunktsioonid elementaarfunktsioonid. Toome siinkohal areafunktsioonide avaldised põhiliste elementaarfunktsioonide kaudu koos määramispiirkondade ja väärtuste hulkadega:

$$\begin{aligned}
\operatorname{arsinh} x &= \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right): \quad X = \mathbb{R},\, Y = \mathbb{R}\,,\\
\operatorname{arcosh} x &= \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right): \quad X = [1,\infty),\, Y = [0,\infty)\,,\\
\operatorname{artanh} x &= \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}: \quad X = (-1,1),\, Y = \mathbb{R}\,,\\
\operatorname{arcoth} x &= \frac{1}{2}\ln\frac{x+1}{x-1}: \quad X = (-\infty,-1)\cup(1,\infty),\, Y = \mathbb{R}\setminus\{0\}\,.
\end{aligned}$$

Hüperboolne siinus ja kosinus on seotud teatud teist liiki joone, nn hüperbooliga. Selle selgitamiseks tuletame kõigepealt ühe abivalemi. Arvutame:

$$\begin{aligned}
&(\cosh x)^2 - (\sinh x)^2 = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2\\
&= \frac{1}{4}\left[e^{2x} + e^{-2x} + 2\right] - \frac{1}{4}\left[e^{2x} + e^{-2x} - 2\right]\\
&= \frac{e^{2x}}{4} + \frac{e^{-2x}}{4} + \frac{1}{2} - \frac{e^{2x}}{4} - \frac{e^{-2x}}{4} + \frac{1}{2} = 1\,.
\end{aligned}$$

Järelikult kehtib valem

$$(\cosh x)^2 - (\sinh x)^2 = 1\,. \tag{1.10}$$

See seos on tuntud trigonomeetria valemi $(\cos x)^2 + (\sin x)^2 = 1$ analoog hüperboolsete trigonomeetriliste funktsioonide korral.

Vaatleme nüüd kahte parameetriliselt antud joont, millest esimene on kirjeldatud võrranditega

$$\begin{cases} x = R\cosh t \\ y = R\sinh t\,,\ t \in \mathbb{R}\,, \end{cases} \tag{1.11}$$

ja teine võrranditega

$$\begin{cases} x = -R\cosh t \\ y = R\sinh t\,,\ t \in \mathbb{R}\,, \end{cases} \tag{1.12}$$

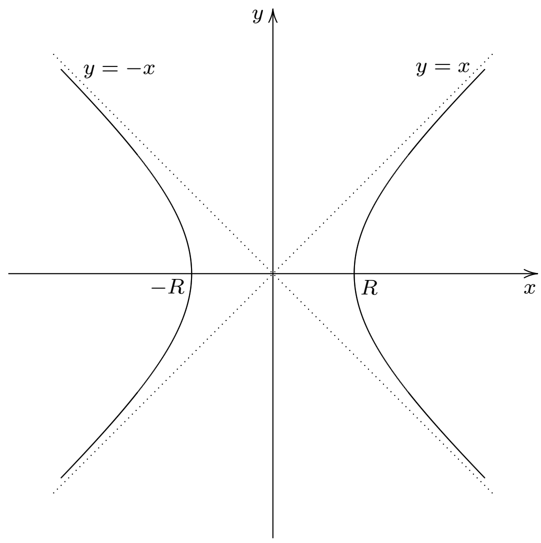
kus kordaja $R$ on positiivne konstant. Nii joone (1.11) kui (1.12) korral kehtib järgmine võrdus

$$x^2 - y^2 = (R\cosh t)^2 - (R\sinh t)^2 = R^2[(\cosh t)^2 - (\sinh t)^2] = R^2$$

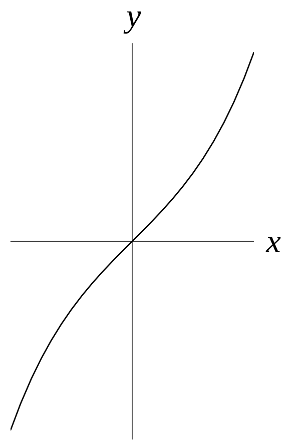
ehk

$$x^2 - y^2 = R^2\,. \tag{1.13}$$

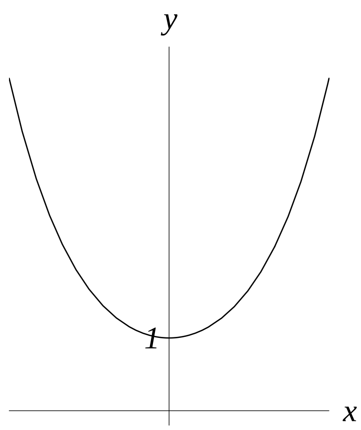
Võrrandiga (1.13) antud joont nimetatakse hüperbooliks (joonis 1.15). Hüperbool koosneb kahest $x$ - telje suhtes sümmeetrilisest harust. Parempoolse haru parameetrilised võrrandid on (1.11) ja vasakpoolse haru parameetrilised võrrandid on (1.12).



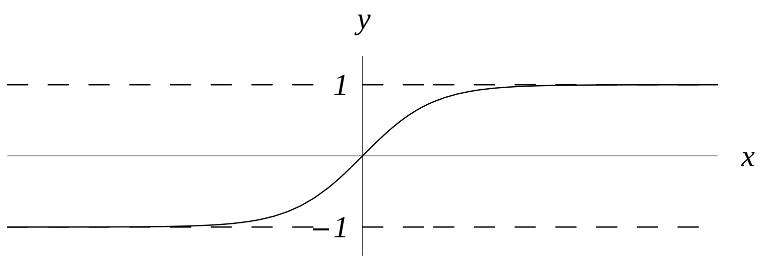

Joonis 1.15



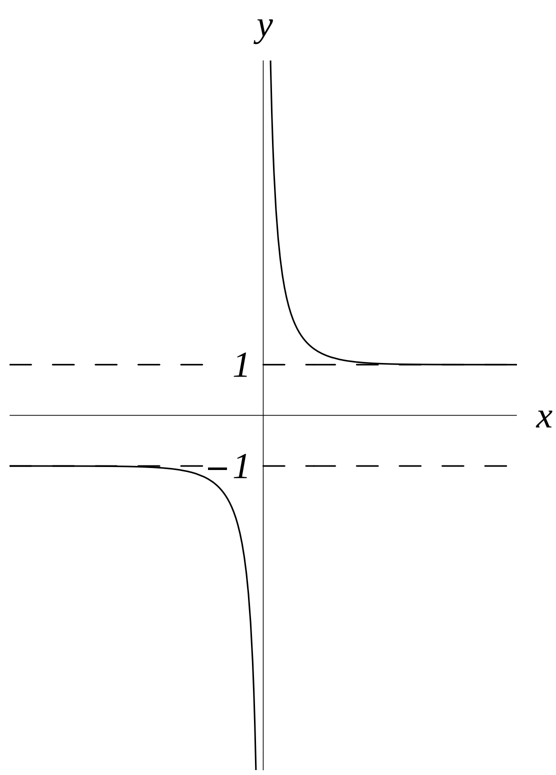

Joonis 1.16: $y = \sinh x$




Joonis 1.17: $y = \cosh x$




Joonis 1.18: $y = \tanh x$




Joonis 1.19: $y = \coth x$

# Peatükk 2

# Piirväärtus ja pidevus

## 2.1 Muutuva suuruse piirprotsessid.

Muutuva suuruse $x$ kohta öeldakse, et ta on *järjestatud*, kui tema väärtustest on moodustatud järjestatud hulk, st hulk mille iga kahe elemendi kohta on võimalik öelda, kumb neist on eelnev ja kumb järgnev.

Näiteks on järjestatud ajast sõltuv suurus. Sel juhul loeme kahest suuruse väärtusest järgnevaks selle, mis vastab suuremale ajamuutuja väärtusele.

Selles paragrahvis tegeleme me selliste järjestatud suurustega, mis mööda järjestust edasi liikudes lähenevad teatud fikseeritud arvule. Need on nn koonduvad e piirväärtust omavad suurused. Nendest mõistetest arusaamiseks käsitleme kõigepealt ühte näidet.

Olgu vaatluse all vedru, mis on ühest otsast kinnitatud ja teine ots on lahtine. Olgu tasakaaluasendis vedru pikkus $a$. Kui vedrut kokku suruda või välja venitada ja seejärel vabastada, hakkab tema lahtine otspunkt tasakaaluasendi ümber võnkuma. Vedru pikkus on sel juhul ajast sõltuv (seega järjestatud) muutuv suurus $x$. Võnkumisprotsessi mõjutavad mitmesugused takistusjõud, mille tagajärjel võnkumine sumbub, st vedru pikkus $x$ läheneb arvule $a$. Vaatame kuidas oleks võimalik sellist lähenemisprotsessi matemaatilistes terminites kirjeldada. Üks võimalus on järgmine. Valime mingisuguse tasakaalupunkti ümbruse, näiteks $(a-0.1, a+0.1)$. Kuna võnkumine sumbub, siis mingist ajahetkest (st $x$ väärtusest) alates kõik järgnevad vedru pikkuse väärtused $x$ jäävad vahemikku $(a-0.1, a+0.1)$, st rahuldavad võrratust $|x-a| < 0.1$. Edasi valime mingi teise, väiksema ümbruse, nt $(a-0.01, a+0.01)$. Arvestades jällegi seda, et võnkumine sumbub, leidub mingi teine, eelnevast suurem ajahetk ja sellele vastav $x$ väärtus nii, et kõik järgnevad $x$ väärtused jäävad vahemikku $(a-0.01, a+0.01)$, st rahuldavad võrratust $|x-a| < 0.01$. Sellist arutelu võib jätkata suvalise kuitahes väikse ümbrusega $(a-\epsilon, a+\epsilon)$. Järelikult, iga kuitahes väikese positiivse arvu $\epsilon$ korral saab näidata sellist suuruse $x$ väärtust, millest alates kõik järgnevad muutuva suuruse väärtused kuuluvad arvu $a$ ümbrusesse $(a-\epsilon, a+\epsilon)$, st rahuldavad võrratust $|x-a| < \epsilon$.

Muutuva suuruse piirväärtuse üldine definitsioon on järgmine:

Olgu $x$ järjestatud muutuv suurus. Arvu $a$ nimetatakse muutuva suuruse $x$ *piirväärtuseks*, kui iga kuitahes väikese positiivse arvu $\epsilon$ korral saab näidata sellist suuruse $x$ väärtust, millest alates kõik järgnevad muutuva suuruse väärtused kuuluvad arvu $a$ ümbrusesse $(a-\epsilon, a+\epsilon)$, st rahuldavad võrratust $|x-a|<\epsilon$.

Kui arv $a$ on suuruse $x$ piirväärtus, siis öeldakse, et suurus $x$ läheneb arvule $a$ ehk koondub arvuks $a$ ja kirjutatakse

$$x \to a \qquad \text{või} \qquad \lim x = a\,.$$

Piirväärtuse üldises definitsioonis ei ole fikseeritud kuidas (vasakult, paremalt või mõlemalt poolt) muutuja $x$ lähenemine arvule $a$ toimub. Seega on piirprotsessi $x \to a$ erijuhtudeks sellised piirprotsessid, kus $x$ läheneb arvule $a$ ainult vasakult või paremalt. Ühepoolsete piirprotsesside definitsioonid saame üldisest piirväärtuse definitsioonist, kui me seal esinevat ümbrust $(a-\epsilon, a+\epsilon)$ kitsendame kas vasakpoolseks või parempoolseks poollõiguks $(a-\epsilon, a]$ või $[a, a+\epsilon)$.

Muutuv suurus $x$ läheneb *vasakult* arvule $a$, kui iga kuitahes väikese positiivse arvu $\epsilon$ korral saab näidata sellist suuruse $x$ väärtust, millest alates kõik järgnevad muutuva suuruse väärtused kuuluvad poollõiku $(a-\epsilon, a]$. Sellisel juhul kirjutatakse

$$x \to a^- \,.$$

Muutuv suurus $x$ läheneb *paremalt* arvule $a$, kui iga kuitahes väikese positiivse arvu $\epsilon$ korral saab näidata sellist suuruse $x$ väärtust, millest alates kõik järgnevad muutuva suuruse väärtused kuuluvad poollõiku $[a, a+\epsilon)$. Siis kirjutatakse

$$x \to a^+ \,.$$

Saab konstrueerida ka lihtsaid füüsikalisi mudeleid, mis illustreerivad ühepoolset koondumist. Näiteks, kui vedru on ühendatud mingi tugeva võnkumist summutava seadmega (nt amortisaatoriga), siis võnkumist ümber tasakaalupunkti ei teki. Vedru pikkus $x$ läheneb $a$-le ainult vasakult või paremalt sõltuvalt sellest, kas vedru on kokku surutud või välja venitatud.

Käsitleme ka selliseid piirprotsesse, mille käigus $x$ ei lähene lõplikule reaalarvule vaid pluss või miinus lõpmatusele. Alustame suurusest, mis läheneb pluss lõpmatusele. Piltlikult väljendudes on tegemist sellise järjestatud suurusega, mis mööda järjestust edasi liikudes kasvavab piiramatult, st saab suuremaks kuitahes suurest positiivsest arvust $M$. Selgitame seda lähemalt. Olgu näiteks $M = 100$. Leidub selline $x$ väärtus, millest alates kõik järgnevad $x$ väärtused on 100-st suuremad. Suurendame arvu $M$. Olgu nt $M = 10000$. Leidub selline (eelnevast suurem) $x$ väärtus, millest alates kõik järgnevad $x$ väärtused on

10000-st suuremad jne. Kokkuvõttes, kuitahes suure positiivse arvu $M$ korral saab näidata sellist suuruse $x$ väärtust, millest alates kõik järgnevad muutuva suuruse väärtused on arvust $M$ suuremad, st rahuldavad võrratust $x > M$.

Üldine definitsioon on järgmine:

Muutuva suuruse $x$ piirväärtus on *lõpmatus* ehk muutuv suurus $x$ läheneb lõpmatusele, kui iga kuitahes suure positiivse arvu $M$ korral saab näidata sellist suuruse $x$ väärtust, millest alates kõik järgnevad muutuva suuruse väärtused rahuldavad võrratust $x > M$. Taolist piirprotsessi tähistatakse järgmiselt:

$$x \to \infty \qquad \text{või} \qquad \lim x = \infty\,.$$

Analoogiliselt saab defineerida ja selgitada ka piirprotsessi $x \to -\infty$. Definitsioon on järgmine:

Muutuva suuruse $x$ piirväärtus on *miinus lõpmatus* ehk muutuv suurus $x$ läheneb miinus lõpmatusele, kui iga absoluutväärtuse poolest kuitahes suure negatiivse arvu $M$ korral saab näidata sellist suuruse $x$ väärtust, millest alates kõik järgnevad muutuva suuruse väärtused rahuldavad võrratust $x < M$. Sellise piirprotsessi tähistusviis on

$$x \to -\infty \qquad \text{või} \qquad \lim x = -\infty\,.$$

## 2.2 Koonduvad ja hajuvad jadad.

Järjestatud muutuva suuruse erijuhuks on muutuv suurus, mille väärtused moodustavad *reaalarvude jada* $J = (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots)$. Valides selles jadas kaks elementi $x_i$ ja $x_k$ saame me alati öelda, kumb neist on eelnev ja kumb järgnev. Tõepoolest, kui $i < k$, siis jada element $x_i$ eelneb elemendile $x_k$, kui aga $i > k$, siis on elementide $x_i$ ja $x_k$ järjestus vastupidine.

Arvu $a$ nimetatakse reaalarvude jada $J$ *piirväärtuseks*, kui iga kuitahes väikese positiivse arvu $\epsilon$ korral saab näidata sellist jada elementi $x_n$, millest alates kõik järgnevad jada elemendid kuuluvad arvu $a$ ümbrusesse $(a-\epsilon, a+\epsilon)$. Jada piirväärtuse kirjutusviis on järgmine:

$$x_n \to a \qquad \text{või} \qquad \lim x_n = a\,.$$

Piirväärtust omavat jada nimetatakse *koonduvaks* ning piirväärtust mitteomavat jada *hajuvaks*.

**Näide.** Vaatleme jada elementidega $x_n = 1 + \frac{(-1)^n}{2^n}$. Taolise jada piirväärtus on 1. Selle tõestamiseks kontrollime piirväärtuse definitsiooni kehtivust arvuga $a = 1$. Vastavalt definitsioonile peame me näitama, et suvalise kuitahes väikese positiivse arvu $\epsilon$ leidub selline jada element, millest alates kõik järgnevad jada elemendid kuuluvad arvu 1 ümbrusesse $(1-\epsilon, 1+\epsilon)$. Taolisesse ümbrusesse kuuluvad jada elemendid rahuldavad võrratust $1-\epsilon < x_n < 1+\epsilon$. Lahendame selle võrratuse arvu $n$ suhtes:

$$1-\epsilon < x_n < 1+\epsilon \;\Leftrightarrow\; 1-\epsilon < 1+\frac{(-1)^n}{2^n} < 1+\epsilon \;\Leftrightarrow\; -\epsilon < \frac{(-1)^n}{2^n} < \epsilon \;\Leftrightarrow\; \frac{1}{2^n} < \epsilon \;\Leftrightarrow\; 2^n > \frac{1}{\epsilon} \;\Leftrightarrow\; n > \log_2 \frac{1}{\epsilon}.$$

Järelikult, kui me etteantud $\epsilon > 0$ korral valime elemendi $x_m$ nii, et $m > \log_2 \frac{1}{\epsilon}$, siis kehtib $x_n \in (1-\epsilon, 1+\epsilon)$ iga $x_m$-le järgneva jada liikme $x_n$ korral. Seega on jada piirväärtuse definitsioon täidetud arvuga $a = 1$. Olemegi tõestanud, et $\lim \left(1+\frac{(-1)^n}{2^n}\right) = 1$. Illustreerime seda tõestust veel mõnede erijuhtude vaatlemisega . Selleks paneme kirja mõned jada esimesed elemendid:

$$x_1 = 0.5,\ x_2 = 1.25,\ x_3 = 0.875,\ x_4 = 1.0625,\ x_5 = 0.96875,$$
$$x_6 = 1.015625,\ x_7 = 0.9921875,\ x_8 = 1.0039625, \ldots$$

Olgu $\epsilon = 0.1$. Näeme, et alates neljandast elemendist kuuluvad kõik järgnevad jada elemendid ümbrusesse $(1-\epsilon, 1+\epsilon) = (1-0.1, 1+0.1) = (0.9, 1.1)$. Järgmiseks olgu $\epsilon = 0.05$. Alates viiendast elemendist kuuluvad kõik järgnevad jada elemendid ümbrusesse $(1-\epsilon, 1+\epsilon) = (1-0.05, 1+0.05) = (0.95, 1.05)$. Kui $\epsilon = 0.01$, siis alates seitsmendast elemendist kuuluvad kõik järgnevad elemendid ümbrusesse $(1-\epsilon, 1+\epsilon) = (1-0.01, 1+0.01) = (0.99, 1.01)$ jne.

## 2.3 Funktsiooni piirväärtus.

Olgu antud funktsioon $f$ argumendiga $x$. Kui argument $x$ on järjestatud, siis saame me järjestada ka funktsiooni väärtused $f(x)$, lugedes funktsiooni kahest väärtusest järgnevaks selle, mis vastab argumendi järgnevale väärtusele.

Näiteks kui funktsiooni $f(x) = x^2$ argumentidest moodustatud järjestatud hulgale $1, 2, 3, 4, 5, \ldots$, vastab funktsiooni väärtuste järjestatud hulk $1, 4, 9, 16, 25, \ldots$.

Olgu funktsiooni $f$ argument $x$ järjestatud selliselt, et ta koondub mingiks arvuks $a$. Meid huvitab küsimus: kas sellisel juhul ka funktsiooni väärtus läheneb mingile arvule $b$? Kui see on nii, ja peale selle arv $b$ ei sõltu punktiks $a$ koonduvast argumendi $x$ järjestusest, siis on vaadeldaval funktsioonil punktis $a$ piirväärtus.

**Funktsiooni piirväärtuse definitsioon I**. Funktsioonil $f$ on *piirväärtus* $b$ kohal $a$, kui suvalises piirprotsessis $x \to a$, mis rahuldab tingimust $x \neq a$, funktsiooni väärtus $f(x)$ läheneb arvule $b$.

Funktsiooni piirväärtuse kirjutusviis on

$$\lim_{x \to a} f(x) = b$$

või

$$f(x) \to b \quad \text{kui} \quad x \to a\,.$$

Fraasi "piirväärtus kohal $a$" asemel võib kasutada ka samaväärseid fraase "piirväärtus punktis $a$" või "piirväärtus argumendi lähenemisel väärtusele $a$".

Tingimus $x \neq a$ piirväärtuse definitsioonis on sisse toodud selleks, et eristada funktsiooni väärtust kohal $a$ tema piirväärtusest kohal $a$. Taoline eristus on vajalik funktsiooni pidevuse käsitlemisel edaspidistes paragrahvides.

Selgitame piirväärtuse definitsiooni ühe lihtsa näitega. Uurime funktsiooni $f(x) = \frac{2x^2+2x-4}{x-1}$ käitumist protsessis $x \to 1$. Vaadeldav funktsioon on määratud kõikjal, välja arvatud punkt $x = 1$. Kui $x \neq 1$, siis taandades murru $\frac{2x^2+2x-4}{x-1}$ lugejast ja nimetajast teguri $x - 1$, saame sellele funktsioonile lihtsama valemi $f(x) = 2x + 4$. Valime mõned punktiks 1 koonduvad argumendi jadad ning arvutame neile vastavad funktsiooni väärtuste jadad:

$$\begin{array}{ccccc}
x_1 = 0 & x_2 = 0.5 & x_3 = 0.9 & x_4 = 0.95 & x_5 = 0.99\ldots \\
f(x_1) = 4 & f(x_2) = 5 & f(x_3) = 5.8 & f(x_4) = 5.9 & f(x_5) = 5.98\ \ldots \\
\\
x_1 = 2 & x_2 = 1.5 & x_3 = 1.1 & x_4 = 1.05 & x_5 = 1.01\ldots \\
f(x_1) = 8 & f(x_2) = 7 & f(x_3) = 6.2 & f(x_4) = 6.1 & f(x_5) = 6.02\ \ldots \\
\\
x_1 = 3 & x_2 = 0 & x_3 = 1.1 & x_4 = 0.99 & x_5 = 1.001\ldots \\
f(x_1) = 10 & f(x_2) = 4 & f(x_3) = 6.2 & f(x_4) = 5.98 & f(x_5) = 6.002\ \ldots
\end{array}$$

Esimeses jadas koondub $x$ vasakult, teises koondub paremalt ja kolmandas koondub vaheldumisi paremalt ja vasakult. Kõigil toodud juhtudel koondub funktsiooni väärtus $f(x)$ arvuks 6. Saab näidata, et suvalises piirprotsessis $x \to 1$ koondub vaadeldava funktsiooni väärtus arvuks 6. Seega $\lim\limits_{x\to 1} \frac{2x^2+2x-4}{x-1} = 6$.

Funktsiooni piirväärtusel on ka teine, samaväärne definitsioon, mis kasutab arvude $a$ ja $b$ ümbrusi. Viimane lähtub tähelepanekust, et kui $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$, siis saab sobivat arvu $a$ ümbrust valides muuta vastava funktsiooni väärtusi sisaldava arvu $b$ ümbruse kuitahes väikeseks. Mainitud definitsiooni juurde jõudmiseks analüüsime kõigepealt toodud näidet edasi. Fikseerime mingi positiivse arvu $\epsilon$ ja vaatleme arvu 6 ümbrust $(6-\epsilon, 6+\epsilon)$. Leiame nende $x$-de hulga, mille korral $f(x)$ kuulub valitud ümbrusesse. Selleks tuleb lahendada võrratus $6 - \epsilon < f(x) < 6 + \epsilon$ muutuja $x$ suhtes. Lahendame selle võrratuse:

$$\begin{gathered}
6-\epsilon < f(x) < 6+\epsilon \quad \Leftrightarrow \quad 6-\epsilon < 2x+4 < 6+\epsilon \quad \Leftrightarrow \\
2-\epsilon < 2x < 2+\epsilon \quad \Leftrightarrow \quad 1-\tfrac{\epsilon}{2} < x < 1+\tfrac{\epsilon}{2}.
\end{gathered}$$

Jättes välja punkti $x = 1$ saame soovitud $x$-de hulga: $x \in (1-\frac{\epsilon}{2}, 1+\frac{\epsilon}{2})$, $x \neq 1$. Seega võib väita, et suvalise kuitahes väikese positiivse arvu $\epsilon$ korral leidub arvu 1 ümbrus $(1-\delta, 1+\delta)$ nii, et kui $x \in (1-\delta, 1+\delta)$, $x \neq 1$, siis $f(x) \in (6-\epsilon, 6+\epsilon)$. Antud näites $\delta = \frac{\epsilon}{2}$.

**Funktsiooni piirväärtuse definitsioon II**. Funktsioonil $f$ on *piirväärtus* $b$ kohal $a$, kui iga kuitahes väikese positiivse arvu $\epsilon$ korral leidub positiivne arv $\delta$ nii, et kui $x \in (a-\delta, a+\delta)$, $x \neq a$, siis $f(x) \in (b-\epsilon, b+\epsilon)$.

On võimalik tõestada, et definitsioonid I ja II on samaväärsed. Definitsioon II on kahtlemata abstraktsem ja raskemini mõistetav kui definitsioon I, kuid seda on lihtsam kasutada mõnede piirväärtustega seotud väidete tõestamiseks allpool.

Mõned märkused:

1. Funktsiooni piirväärtus on alati üheselt määratud. See tähendab, et

$$\text{kui} \quad \lim_{x \to a} f(x) = b_1 \quad \text{ja} \quad \lim_{x \to a} f(x) = b_2, \quad \text{siis} \quad b_1 = b_2\,.$$

2. Funktsioonil võib olla piirväärtus ka punktis $a$, mis asub väljaspool tema määramispiirkonda.

**Lõpmatusi sisaldavad piirväärtused**. Analoogiliselt saab käsitleda ka piirväärtusi, milles lõplike arvude $a$ ja $b$ asemel esinevad suurused $-\infty$ või $\infty$. Definitsiooni I on eriti lihtne üldistada taolistele juhtudele. Seal tuleb lihtsalt arv $a$ või $b$ asendada kas suurusega $\infty$ või $-\infty$.

Toome siinkohal vaid piirväärtuse

$$\lim_{x \to a} f(x) \;=\; \infty$$

definitsioonid.
(i) Funktsioonil $f$ on *piirväärtus* $\infty$ kohal $a$ kui suvalises piirprotsessis $x \to a$, mis rahuldab tingimust $x \neq a$, funktsiooni väärtus $f(x)$ läheneb lõpmatusele.
(ii) Funktsioonil $f$ on *piirväärtus* $\infty$ kohal $a$, kui iga kuitahes suure positiivse arvu $M$ korral leidub positiivne arv $\delta$ nii, et kui $x \in (a-\delta, a+\delta)$, $x \neq a$, siis $f(x) > M$.
**Näide.** Tõestame, et $\lim\limits_{x \to 2} \frac{1}{(x-2)^2} = \infty$, kasutades selleks definitsiooni (ii). Fikseerime mingi positiivse arvu $M$. Vastavalt definitsioonile tuleb leida selline $\delta$, et kui $x \in (2-\delta, 2+\delta)$, $x \neq 2$, siis $f(x) > M$. Lahendame võrratuse $f(x) > M$ muutuja $x$ suhtes:

$$\begin{gathered} f(x) > M \quad \Leftrightarrow \quad \tfrac{1}{(x-2)^2} > M \quad \Leftrightarrow \quad (x-2)^2 < \tfrac{1}{M} \quad \Leftrightarrow \\ \sqrt{(x-2)^2} = |x-2| < \tfrac{1}{\sqrt{M}} \quad \Leftrightarrow \quad -\tfrac{1}{\sqrt{M}} < x-2 < \tfrac{1}{\sqrt{M}} \quad \Leftrightarrow \\ 2 - \tfrac{1}{\sqrt{M}} < x < 2 + \tfrac{1}{\sqrt{M}}. \end{gathered}$$

Jättes välja punkti $x = 2$, kus $f(x)$ ei ole määratud, saame järgmise hulga: $x \in (2-\delta, 2+\delta)$, $x \neq 2$, kus $\delta = \frac{1}{\sqrt{M}}$. Järelikult, suvalise kuitahes suure positiivse arvu $M$ korral leidub positiivne arv $\delta$ nii, et kui $x \in (2-\delta, 2+\delta)$, $x \neq 2$, siis $f(x) > M$. Sellega ongi väide $\lim\limits_{x \to 2} \frac{1}{(x-2)^2} = \infty$ tõestatud.

**Arv e**. Matemaatikas ja selle rakendustes kasutatakse sageli järgmisi piirväärtusi:

$$e \;=\; \lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \;=\; \lim_{x \to -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x.$$

Arv $e$ on irratsionaalarv: $e \approx 2.71828...$

Logaritmi alusel $e$ nimetatakse naturaallogaritmiks ja tähistatakse sümboliga ln. Seega $\log_e x = \ln x$.

## 2.4 Ühepoolsed piirväärtused.

Funktsioonil $f$ on *vasakpoolne piirväärtus* $b$ kohal $a$, kui suvalises piirprotsessis $x \to a^-$, mis rahuldab tingimust $x \neq a$, funktsiooni väärtus $f(x)$ läheneb arvule $b$.

Vasakpoolse piirväärtuse kirjutusviis on

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = b$$

või

$$f(x) \to b \quad \text{kui} \quad x \to a^- .$$

Funktsioonil $f$ on *parempoolne piirväärtus* $b$ kohal $a$, kui suvalises piirprotsessis $x \to a^+$, mis rahuldab tingimust $x \neq a$, funktsiooni väärtus $f(x)$ läheneb arvule $b$.

Parempoolse piirväärtuse kirjutusviis on

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = b$$

või

$$f(x) \to b \quad \text{kui} \quad x \to a^+ .$$

Toodud definitsioonides võib lõpliku arvu $b$ asendada kas $-\infty$-ga või $\infty$-ga.

Illustreerime ühepoolseid piirväärtusi näitega. Vaatleme järgmist funktsiooni:

$$f(x) = \begin{cases} x+2, & \text{kui } x < 1, \\ x+3, & \text{kui } x > 1. \end{cases}$$

Arvutame selle funktsiooni ühepoolsed piirväärtused punktis 1. Valime punktiks 1 koonduvad vasak- ja parempoolsed jadad ning arvutame neile vastavad funktsiooni väärtuste jadad:

$$\begin{array}{ccccc} x_1 = 0 & x_2 = 0.5 & x_3 = 0.9 & x_4 = 0.95 & x_5 = 0.99\ldots \\ f(x_1) = 2 & f(x_2) = 2.5 & f(x_3) = 2.9 & f(x_4) = 2.95 & f(x_5) = 2.99\ldots \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} x_1 = 2 & x_2 = 1.5 & x_3 = 1.1 & x_4 = 1.05 & x_5 = 1.01\ldots \\ f(x_1) = 5 & f(x_2) = 4.5 & f(x_3) = 4.1 & f(x_4) = 4.04 & f(x_5) = 4.01\ldots \end{array}$$

Näeme, et vasakult arvuks 1 koonduva jada korral läheneb $f(x)$ arvule 3 ja paremalt arvuks 1 koonduva jada korral läheneb $f(x)$ arvule 4. Saab tõestada, et suvaliste piirprotsesside $x \to 1^-$ ja $x \to 1^+$ korral läheneb $f(x)$ vastavalt arvudele 3 ja 4. Seega $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = 3$ ja $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = 4$. Ühepoolsed piirväärtused on erinevad. Ühtlasi paneme tähele, et funktsioonil puudub piirväärtus punktis 1. See on nii, sest eelmises paragrahvis toodud piirväärtuse definitsioon I ei ole täidetud. Ei leidu arvu $b$, millele $f(x)$ läheneks kõigis piirprotsessides $x \to a$, kus $x \neq a$. Vasakpoolses ja parempoolses piirprotsessis läheneb $f(x)$ erinevatele arvudele.

Kehtib järgmine, üldisem väide:

*Piirväärtus $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ eksisteerib siis ja ainult siis kui eksisteerivad võrdsed ühepoolsed piirväärtused $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ ja $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$. Peale selle, piirväärtuse $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ olemasolu korral kehtib valem*

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x)\,.$$

Eespooltoodud näites olid funktsioonil olemas mõlemad ühepoolsed piirväärtused, kuid piirväärtus puudus. Saab tuua näiteid sellistest funktsioonidest, millel puuduvad ka ühepoolsed piirväärtused. Analüüsime funktsiooni $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ käitumist protsessis $x \to 0^+$. Selleks valime järgmise jada: $x_n = \frac{1}{(n+\frac{1}{2})\pi}$ (ehk $x_1 = \frac{2}{3\pi}$, $x_1 = \frac{2}{5\pi}, \ldots$). Vastavad funktsiooni väärtused on siis

$$f(x_n) = \sin(n+1/2)\pi = \begin{cases} 1 & \text{kui } n \text{ on paaris,} \\ -1 & \text{kui } n \text{ on paaritu.} \end{cases}$$

Funktsioon omandab vaheldumisi väärtusi $-1$ ja $1$ ning seega ei lähene ühelegi arvule. Järelikult parempoolne piirväärtus $\lim\limits_{x\to 0^+} \sin\frac{1}{x}$ puudub. Analoogiliselt saab näidata, et puudub ka vasakpoolne piirväärtus $\lim\limits_{x\to 0^-} \sin\frac{1}{x}$.

## 2.5 Lõpmatult kasvavad suurused ja tõkestatud funktsioonid.

**Lõpmatult kasvava suuruse mõiste**. Funktsiooni $f$ nimetatakse *lõpmatult kasvavaks suuruseks protsessis $x \to a$*, kui

$$\lim_{x\to a} |f(x)| = \infty\,.$$

Lõpmatult kasvava suuruse saab defineerida ka protsessides $x \to \infty$ ja $x \to -\infty$. Selleks tuleb toodud definitsioonis arv $a$ asendada kas suurusega $\infty$ või $-\infty$.

**Tõkestatud funktsiooni mõiste**. Olgu $D$ funktsiooni $f$ määramispiirkonna alamhulk. Kui leidub positiivne arv $M$ nii, et iga $x \in D$ korral kehtib võrratus $|f(x)| \leq M$, siis öeldakse, et funktsioon $f$ on *tõkestatud hulgas $D$*.

Teiste sõnadega: funktsioon $f$ on tõkestatud hulgas $D$, kui kõigile hulka $D$ kuuluvatele $x$-dele vastavatest $f(x)$-dest moodustatud hulk on tõkestatud.

**Piirprotsessis tõkestatud funktsioon**. Funktsiooni $f$ nimetatakse *tõkestatuks protsessis $x \to a$*, kui leidub selline arvu $a$ ümbrus, kus $f(x)$ on tõkestatud.

Arvestades arvu ümbruse ja tõkestatud funktsiooni mõisteid, saab selle definitsiooni sõnastada ka nii: Funktsiooni $f$ nimetatakse *tõkestatuks protsessis* $x \to a$, kui leiduvad positiivsed arvud $M$ ja $\delta$ nii, et iga $x \in (a-\delta, a+\delta)$ korral kehtib võrratus $|f(x)| \leq M$.

Kehtib järgmine väide:

*Kui eksisteerib lõplik piirväärtus* $\lim\limits_{x \to a} f(x)$*, siis on funktsioon* $f$ *tõkestatud protsessis* $x \to a$*.*

*Tõestus*: Eksisteerigu lõplik piirväärtus $b = \lim\limits_{x \to a} f(x)$. Kasutame piirväärtuse definitsiooni II. Fikseerime mingi positiivse arvu $\epsilon$. Vastavalt definitsioonile leidub positiivne arv $\delta$ nii, et kui $x \in (a-\delta, a+\delta)$, $x \neq a$, siis $f(x) \in (b-\epsilon, b+\epsilon)$. Viimasest seosest tuleneb, et $|f(x) - b| < \epsilon$. Kuna $|f(x)| - |b| \leq |f(x) - b|$ absoluutväärtuse 4. omaduse põhjal (vt §1.1), siis saame $|f(x)| - |b| < \epsilon$. Sellest järeldub, et $|f(x)| < |b| + \epsilon$. Seega oleme näidanud, et kui $x \in (a-\delta, a+\delta)$, $x \neq a$, siis kehtib võrratus $|f(x)| < |b| + \epsilon$. Lisades vaadeldavate $x$-de hulka ka punktis $a$, näeme, et iga $x$ korral hulgast $(a-\delta, a+\delta)$ kehtib võrratus $|f(x)| < \max\{|b| + \epsilon\,;\, |f(a)|\}$. Tähistame $M = \max\{|b| + \epsilon\,;\, |f(a)|\}$. Oleme näidanud, et leiduvad positiivsed arvud $\delta$ ja $M$ nii, et iga $x \in (a-\delta, a+\delta)$ korral kehtib võrratus $|f(x)| \leq M$. Seega on protsessis $x \to a$ tõkestatud funktsiooni definitsioon täidetud. Väide on tõestatud.

## 2.6 Lõpmatult väikesed suurused ja nende põhiomadused.

**Lõpmatult väikese suuruse mõiste**. Funktsiooni $f$ nimetatakse lõpmatult väikeseks ehk lõpmatult kahanevaks suuruseks protsessis $x \to a$, kui

$$\lim_{x \to a} f(x) = 0\,.$$

Lõpmatult väikese suuruse saab defineerida ka protsessides $x \to \infty$ ja $x \to -\infty$. Selleks tuleb toodud definitsioonis arv $a$ asendada kas suurusega $\infty$ või $-\infty$.

Lõpmatult väikestel suurustel on järgmised olulised omadused:

**Omadus 1.** *Funktsioon* $f(x)$ *on lõpmatult väike suurus protsessis* $x \to a$ *siis ja ainult siis, kui* $\frac{1}{f(x)}$ *on lõpmatult kasvav suurus samas protsessis.*

*Tõestus*: Olgu $f(x)$ lõpmatult väike kui $x \to a$, st $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$. Tõestame, et siis on $\frac{1}{f(x)}$ lõpmatult kasvav ehk $\lim\limits_{x \to a} \left|\frac{1}{f(x)}\right| = \infty$. Vastavalt definitsioonile (ii) §2.3 peame me näitama, et iga kuitahes suure positiivse arvu $M$ korral leidub positiivne arv $\delta$ nii, et kui $x \in (a-\delta, a+\delta)$, $x \neq a$, siis $\left|\frac{1}{f(x)}\right| > M$.

Olgu antud suvaline positiivne arv $M$. Tähistame $\epsilon = \frac{1}{M}$. Kuna me eeldasime, et $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$, siis piirväärtuse definitsiooni II põhjal §2.3 leidub positiivne arv $\delta$ nii, et kui $x \in (a-\delta, a+\delta)$, $x \neq a$, siis $f(x) \in (-\epsilon, \epsilon) = \left(-\frac{1}{M}, \frac{1}{M}\right)$. Teisendame viimast seost:

$$f(x) \in \left(-\frac{1}{M}, \frac{1}{M}\right) \;\Leftrightarrow\; |f(x)| < \frac{1}{M} \;\Leftrightarrow\; \left|\frac{1}{f(x)}\right| = \frac{1}{|f(x))|} > M.$$

Seega suvalise positiivse arv $M$ korral leidub positiivne arv $\delta$ nii, et kui $x \in (a-\delta, a+\delta)$, $x \neq a$, siis $\left|\frac{1}{f(x)}\right| > M$. Seda oligi tarvis tõestada.

Vastupidine väide: kui $\frac{1}{f(x)}$ on lõpmatult kasvav protsessis $x \to a$, siis $f(x)$ on lõpmatult väike samas protsessis, tõestatakse analoogiliselt.

**Näide.** Olgu $a \in \mathbb{R}$ ja $n > 0$. Siis $\lim\limits_{x\to a}(x-a)^n = 0$, st $(x-a)^n$ on lõpmatult väike suurus protsessis $x \to a$. Omadusest 1 tuleneb, et $\frac{1}{(x-a)^n}$ on lõpmatult kasvav suurus samas protsessis, st $\lim\limits_{x\to a}\left|\frac{1}{(x-a)^n}\right| = \infty$.

**Omadus 2.** *Kui funktsioon $f(x)$ on lõpmatult väike suurus protsessis $x \to a$ ja $g(x)$ on tõkestatud samas protsessis, siis korrutis $f(x)g(x)$ on lõpmatult väike suurus protsessis $x \to a$.*

*Tõestus*: Me peame tõestama, et $\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x) = 0$. Vastavalt piirväärtuse definitsioonile tuleb näidata, et iga väikese positiivse arvu $\epsilon$ korral leidub positiivne arv $\delta$ nii, et kui $x \in (a-\delta, a+\delta)$, $x \neq a$, siis $f(x)g(x) \in (-\epsilon, \epsilon)$.

Olgu antud suvaline positiivne arv $\epsilon$. Kuna $g(x)$ on tõkestatud protsessis $x \to a$, siis eelmises paragrahvis toodud definitsiooni põhjal leiduvad positiivsed arvud $M$ ja $\delta_0$ nii, et iga $x \in (a-\delta_0, a+\delta_0)$ korral kehtib võrratus $|g(x)| \leq M$. Tähistame $\epsilon_1 = \frac{\epsilon}{M}$. Kuna $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$, siis piirväärtuse definitsiooni põhjal leidub positiivne arv $\delta_1$ nii, et kui $x \in (a-\delta_1, a+\delta_1)$, $x \neq a$, siis $f(x) \in (-\epsilon_1, \epsilon_1)$ ehk $|f(x)| < \epsilon_1$. Oleme näidanud, et
(1) iga $x \in (a-\delta_0, a+\delta_0)$ korral kehtib $|g(x)| \leq M$ ja
(2) iga $x \in (a-\delta_1, a+\delta_1) \setminus \{a\}$ korral kehtib $|f(x)| < \epsilon_1$.

Hulkade $(a-\delta_0, a+\delta_0)$ ja $(a-\delta_1, a+\delta_1) \setminus \{a\}$ ühisosas kehtivad mõlemad võrratused $|g(x)| \leq M$ ja $|f(x)| < \epsilon_1$. Leiame selle ühisosa. Tähistame $\delta = \min\{\delta_0\,;\,\delta_1\}$. Siis

$$(a-\delta_0, a+\delta_0) \cap (a-\delta_1, a+\delta_1) \setminus \{a\} = (a-\delta, a+\delta) \setminus \{a\}.$$

Seega iga $x \in (a-\delta, a+\delta)$, $x \neq a$ korral kehtivad mõlemad võrratused $|g(x)| \leq M$ ja $|f(x)| < \epsilon_1$. Neist võrratustest järeldub, et

$$|f(x)g(x)| = |f(x)|\,|g(x)| < \epsilon_1 M = \frac{\epsilon}{M} M = \epsilon.$$

Seega $|f(x)g(x)| < \epsilon$ ehk $f(x)g(x) \in (-\epsilon, \epsilon)$. Oleme näidanud, et iga väikese positiivse arvu $\epsilon$ korral leidub positiivne arv $\delta$ nii, et kui $x \in (a-\delta, a+\delta)$, $x \neq a$, siis $f(x)g(x) \in (-\epsilon, \epsilon)$. Seda oligi tarvis tõestada.

**Näide.** Arvutame piirväärtuse $\lim\limits_{x\to 0} x \sin\frac{1}{x}$. Vaatleme eraldi tegureid $\sin\frac{1}{x}$ ja $x$. Kuna $|\sin\frac{1}{x}| \leq 1$, siis on funktsioon $\sin\frac{1}{x}$ tõkestatud terves oma määramispiirkonnas $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Seega on $\sin\frac{1}{x}$ tõkestatud ka protsessis $x \to 0$. Tegur $x$ läheneb nullile kui $x \to 0$. Järelikult, omaduse 2 põhjal $\lim\limits_{x\to 0} x \sin\frac{1}{x} = 0$.

## 2.7 Piirväärtuste omadused.

Paneme kõigepealt kirja järgmised algebraliste tehetega seotud omadused:

1. $\lim\limits_{x\to a}[f(x)+g(x)] = \lim\limits_{x\to a} f(x) + \lim\limits_{x\to a} g(x)\,,$
2. $\lim\limits_{x\to a}[f(x)g(x)] = \lim\limits_{x\to a} f(x) \lim\limits_{x\to a} g(x)\,,$
3. $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$ kui $\lim\limits_{x\to a} g(x) \neq 0\,.$

Otseste järeldustena omadustest 1 ja 2 saame me tuletada veel kaks omadust:

4. $\lim\limits_{x\to a}[Cf(x)] = \lim\limits_{x\to a} C \lim\limits_{x\to a} f(x) = C \lim\limits_{x\to a} f(x)\,, \quad C$ – konstant,
5. $\lim\limits_{x\to a}[f(x)-g(x)] = \lim\limits_{x\to a}[f(x)+(-1)g(x)] = \lim\limits_{x\to a} f(x) + \lim\limits_{x\to a}[(-1)g(x)]$
   $= \lim\limits_{x\to a} f(x) + (-1)\lim\limits_{x\to a} g(x) = \lim\limits_{x\to a} f(x) - \lim\limits_{x\to a} g(x)\,.$

Omadused 1 - 5 jäävad kehtima ka siis, kui neis esinev piirprotsess $x \to a$ asendada ühega järgmistest piirprotsessidest:

$$x \to a^-\,,\ x \to a^+\,,\ x \to -\infty\,,\ x \to \infty\,.$$

**Liitfunktsiooni piirväärtuse arvutamise reegel**. Olgu antud kaks funktsiooni $y = f(x)$ ja $z = g(y)$. Kui $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ ja piirväärtus $\lim\limits_{y\to b} g(y)$ eksisteerib, siis eksisteerib ka piirväärtus $\lim\limits_{x\to a} g[f(x)]$ ja kehtib valem

$$\lim_{x\to a} g[f(x)] \;=\; \lim_{y\to b} g(y)\,.$$

## 2.8 Lõpmatult väikeste ja lõpmatult kasvavate suuruste võrdlemine.

**Lõpmatult väikeste suuruste võrdlemine.** Olgu $f$ ja $g$ lõpmatult väikesed suurused protsessis $x \to a$.

1. Kui eksisteerib lõplik nullist erinev piirväärtus $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$, siis nimetatakse suurusi $f$ ja $g$ sama järku lõpmatult väikesteks suurusteks.

2. Kui $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$, siis nimetatakse suurusi $f$ ja $g$ ekvivalentseteks lõpmatult väikesteks suurusteks märkides seda kujul $f \sim g$.

3. Kui $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$, siis nimetatakse suurust $f$ kõrgemat järku lõpmatult väikeseks suuruseks $g$ suhtes.

Kahe ekvivalentse lõpmatult väikese suuruse vahe kohta kehtib järgmine väide:

*Kui $f$ ja $g$ on ekvivalentsed lõpmatult väikesed suurused, siis on $f-g$ kõrgemat järku lõpmatult väike suurus nii $f$ kui $g$ suhtes.*

*Tõestus*: Kuna vastavalt eeldusele $f$ ja $g$ on ekvivalentsed lõpmatult väikesed suurused siis

$$\lim_{x\to a}\frac{g(x)}{f(x)}=\frac{1}{\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}}=1\,.$$

Seega,

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-g(x)}{f(x)}=\lim_{x\to a}\left[1-\frac{g(x)}{f(x)}\right]=1-\lim_{x\to a}\frac{g(x)}{f(x)}=1-1=0\,.$$

See võrdus näitab et $f-g$ on kõrgemat järku lõpmatult väike suurus $f$ suhtes. Väide, et $f-g$ on kõrgemat järku lõpmatult väike suurus $g$ suhtes, tõestatakse analoogiliselt.

**Lõpmatult kasvavate suuruste võrdlemine.** Olgu $f$ ja $g$ lõpmatult kasvavad suurused protsessis $x\to a$.

1. Kui eksisteerib lõplik nullist erinev piirväärtus $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$, siis nimetatakse suurusi $f$ ja $g$ sama järku lõpmatult kasvavateks suurusteks.

2. Kui $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=1$, siis nimetatakse suurusi $f$ ja $g$ ekvivalentseteks lõpmatult kasvavateks suurusteks märkides seda kujul $f\sim g$.

3. Kui $\lim\limits_{x\to a}\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right|=\infty$, siis nimetatakse suurust $f$ kõrgemat järku lõpmatult kasvavaks suuruseks $g$ suhtes.

## 2.9 Funktsiooni pidevus. Katkevuspunktide liigitus.

**Pideva funktsiooni mõiste.** Funktsiooni $f$ nimetatakse pidevaks punktis $a$, kui

1. $f$ on määratud argumendi väärtusel $a$, st $a\in X$,

2. eksisteerib lõplik piirväärtus $\lim\limits_{x\to a}f(x)$,

3. $\lim\limits_{x\to a}f(x)=f(a)$.

Väljendi "pidev punktis $a$" asemel võib kasutada ka sünonüüme "pidev kohal $a$" või "pidev argumendi väärtusel $a$".

Punktis $a$ pideva funktsiooni graafik on selle punktis pidev joon.

Pideva funktsiooni definitsioonis esineva tingimuse 3 võib kirja panna ka pisut teistsugusel kujul. Selleks kasutame alljärgnevalt defineeritud argumendi muudu ja funktsiooni muudu mõisteid:

$$\Delta x = x - a \quad - \quad \text{argumendi muut kohal } a\,,$$
$$\Delta y = f(x) - f(a) \quad - \quad \text{funktsiooni muut kohal } a\,.$$

Kehtib järgmine samaväärsete valemite ahel:

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a) \;\Leftrightarrow\; \lim_{x\to a} f(x) - f(a) = 0 \;\Leftrightarrow\; \lim_{x\to a} f(x) - \lim_{x\to a} f(a) = 0$$
$$\Leftrightarrow\; \lim_{x\to a}[f(x) - f(a)] = 0 \;\Leftrightarrow\; \lim_{x\to a} \Delta y = 0 \;\Leftrightarrow\; \lim_{\Delta x\to 0} \Delta y = 0\,.$$

Järelikult on pideva funktsiooni definitsioonis esinev tingimus 3 samaväärne võrdusega

$$\lim_{\Delta x\to 0} \Delta y = 0\,.$$

Kehtivad järgmised väited:

1. *Kui funktsioonid $f$ ja $g$ on pidevad punktis $a$, siis on selles punktis pidevad ka summa $f+g$, vahe $f-g$, korrutis $fg$ ja eeldusel $g(a) \neq 0$ ka jagatis $\frac{f}{g}$.*

2. *Kui funktsioon $y = f(x)$ on pidev punktis $a$ ja funktsioon $z = g(y)$ on pidev punktis $f(a)$, siis on liitfunktsioon $z = g[f(x)]$ pidev punktis $a$.*

Need väited järelduvad otseselt §2.7 toodud piirväärtuste omadustest.

**Katkevuspunkti mõiste.** Punkti, kus funktsioon ei ole pidev, nimetatakse selle funktsiooni katkevuspunktiks.

Katkevuspunktis funktsiooni graafik katkeb. Katkevuspunkt võib paikneda näiteks väljaspool funktsiooni määramispiirkonda. Sellisel juhul on rikutud pideva funktsiooni definitsioonis toodud tingimus 1. Juhul, kui katkevuspunkt paikneb funktsiooni määramispiirkonnas, siis on rikutud kas pidevuse tingimus 2 või 3.

**Katkevuspunktide liigitus.** Olgu $a$ funktsiooni $f$ katkevuspunkt.

1. Kui punktis $a$ eksisteerivad lõplikud ühepoolsed piirväärtused $\lim_{x\to a^-} f(x)$ ja $\lim_{x\to a^+} f(x)$, siis nimetatakse seda punkti funktsiooni $f$ esimest liiki katkevuspunktiks. Esimest liiki katkevuspunkte on kahesuguseid:

   a) Kui esimest liiki katkevuspunktis $a$ kehtib võrdus

   $$\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a} f(x),$$

   siis nimetatakse seda punkti funktsiooni $f$ kõrvaldatavaks katkevuspunktiks.

b) Kui esimest liiki katkevuspunktis $a$ kehtib võrratus

$$\lim_{x\to a^-} f(x) \neq \lim_{x\to a^+} f(x),$$

siis nimetatakse seda punkti funktsiooni $f$ hüppepunktiks (hüppekohaks).

2. Kui vähemalt üks ühepoolsetest piirväärtustest $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ või $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ puudub või ei ole lõplik, siis nimetatakse punkti $a$ funktsiooni $f$ teist liiki katkevuspunktiks. (Lühemalt: teist liiki katkevuspunktid on kõik need katkevuspunktid, mis ei ole esimest liiki.)

**Näiteid.** §2.3 vaadeldud funktsioon $f(x) = \frac{2x^2+2x-4}{x-1}$ katkeb punktis $x = 1$. Kuid selles punktis olemas lõplikud ühepoolsed piirväärtused ja need on võrdsed: $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} f(x) = 6$. Seega on tegemist esimest liiki katkevuspunktiga, konkreetselt kõrvaldatava katkevuspunktiga. Kui $x \neq 1$, siis taandades murru $\frac{2x^2+2x-4}{x-1}$ lugejast ja nimetajast teguri $x - 1$, saame selle funktsiooni valemile kuju $f(x) = 2x + 4$. Seega on vaadeldava funktsiooni graafikuks punkti $(0, 4)$ läbiv, tõusu 2 omav sirge, millest on välja lõigatud punkt koordinaatidega $(1, 6)$. Katkevuspunkti on võimalik "kõrvaldada" defineerides funktsiooni väärtuse punktis 1 valemiga $f(1) = 6$. Siis muutub funktsioon pidevaks, avaldudes iga $x \in \mathbb{R}$ korral valemiga $f(x) = 2x + 4$.

§2.4 vaadeldud funktsioon

$$f(x) = \begin{cases} x+2, & \text{kui } x < 1, \\ x+3, & \text{kui } x > 1 \end{cases}$$

katkeb punktis $x = 1$. Ühepoolsed piirväärtused eksisteerivad ja on lõplikud kuid erinevad, nimelt $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = 3$ ja $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = 4$. Tegemist on esimest liiki katkevuspunktiga, konkreetselt hüppekohaga. Funktsiooni graafikul esineb "hüpe" argumendi väärtuse 1 kohal.

Funktsioonil $f(x) = \frac{1}{(x-2)^2}$ on katkevuspunkt $x = 2$. Ühepoolsed piirväärtused on olemas, kuid nad ei ole lõplikud: $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2} f(x) = \infty$. Seega on tegemist teist liiki katkevuspunktiga.

Funktsioon $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ katkeb kohal $x = 0$. Kuna ühepoolsed piirväärtused $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$ ja $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ puuduvad, siis on tegemist teist liiki katkevuspunktiga.

## 2.10 Ühepoolne pidevus. Pidevus hulkadel.

**Ühepoolselt pidevad funktsioonid**. Funktsiooni $f$ nimetatakse vasakult pidevaks punktis $a$, kui

1. $f$ on määratud argumendi väärtusel $a$, st $a \in X$,

2. eksisteerib lõplik vasakpoolne piirväärtus $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$,

3. $\lim_{x\to a^-} f(x) = f(a)$.

Analoogiliselt defineeritakse ka paremalt pidev funktsioon. Selleks tuleb definitsioonis esinev vasakpoolne piirväärtus $\lim_{x\to a^-} f(x)$ asendada parempoolse piirväärtusega $\lim_{x\to a^+} f(x)$.

Näiteks funktsioon

$$f(x) = \begin{cases} x+2, & \text{kui } x < 1, \\ x+3, & \text{kui } x \geq 1 \end{cases}$$

on oma katkevuspunktis $x = 1$ paremalt pidev, sest $\lim_{x\to 1^+} f(x) = 4 = f(1)$, kuid ei ole seal vasakult pidev, sest $\lim_{x\to 1^-} f(x) = 3 \neq f(1)$.

Seevastu funktsioon

$$f(x) = \begin{cases} x+2, & \text{kui } x \leq 1, \\ x+3, & \text{kui } x > 1 \end{cases}$$

on katkevuspunktis $x = 1$ vasakult pidev, sest $\lim_{x\to 1^-} f(x) = 3 = f(1)$, kuid ei ole seal paremalt vasakult pidev, sest $\lim_{x\to 1^+} f(x) = 4 \neq f(1)$.

**Vahemikus pidevad funktsioonid.** Kui funktsioon $f$ on pidev vahemiku $(a, b)$ kõigis punktides, siis öeldakse, et see funktsioon on pidev vahemikus $(a, b)$.

**Lõigul pidevad funktsioonid.** Kui funktsioon $f$ on määratud lõigul $[a, b]$, pidev vahemikus $(a, b)$ ning lõigu otspunktides $a$ ja $b$ vastavalt paremalt ja vasakult pidev, siis öeldakse, et see funktsioon on pidev lõigul $[a, b]$.

Näiteks funktsioon

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{kui } x \leq 1, \\ x+1, & \text{kui } 1 < x \leq 2, \\ x+2, & \text{kui } x > 2 \end{cases}$$

on pidev vahemikus $(1, 2)$. Samas ei ole see funktsioon pidev lõigul $[1, 2]$, sest ta ei ole selle lõigu vasakus otspunktis paremalt pidev. Nimelt $f(1) = 1$ kuid $\lim_{x\to 1^+} f(x) = 2$. Seevastu funktsioon

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{kui } x < 1, \\ x+1, & \text{kui } 1 \leq x \leq 2, \\ x+2, & \text{kui } x > 2 \end{cases}$$

on pidev lõigul $[a, b]$, sest lisaks pidevusele vahemikus $(a, b)$ on ta paremalt pidev punktis $x = 1$ ( $\lim_{x\to 1^+} f(x) = f(1) = 2$) ja vasakult pidev punktis $x = 2$ ( $\lim_{x\to 2^-} f(x) = f(2) = 3$).

## 2.11 Lõigul pidevate funktsioonide omadusi.

Olgu antud funktsioon $f$ mis on määratud lõigul $[a, b]$.

**Funktsiooni suurim ja vähim väärtus lõigul.** Kui leidub punkt $x_1$ lõigult $[a, b]$ nii, et iga teise punkti $x$ korral samalt lõigult kehtib võrratus $f(x_1) \geq f(x)$, siis nimetatakse arvu $f(x_1)$ funktsiooni $f$ suurimaks väärtuseks lõigul $[a, b]$.

Kui leidub punkt $x_2$ lõigult $[a, b]$ nii, et iga teise punkti $x$ korral samalt lõigult kehtib võrratus $f(x_2) \leq f(x)$, siis nimetatakse arvu $f(x_2)$ funktsiooni $f$ vähimaks väärtuseks lõigul $[a, b]$.

Lõigul pidevatel funktsioonidel on järgmised omadused:

**Omadus 1**. *Lõigul pidev funktsioon saavutab oma suurima ja vähima väärtuse sellel lõigul.*

**Omadus 2**. *Lõigul pidev funktsioon saavutab sellel lõigul iga väärtuse oma suurima ja vähima väärtuse vahel.*

**Omadus 3**. *Kui funktsioon $f$ on pidev lõigul $[a, b]$ ja omandab selle lõigu otspunktides erineva märgiga väärtusi, siis leidub sellel lõigul vähemalt üks punkt $c$, kus $f(c) = 0$.*

Omadus 3 järeldub otseselt omadusest 2. Kui pideval funktsioonil $f$ on lõigu otspunktides erineva märgiga väärtused, siis on selle funktsiooni suurim väärtus positiivne ja vähim väärtus negatiivne. Teisest küljest, vastavalt omadusele 2 saavutab $f$ iga väärtuse oma suurima ja vähima väärtuse vahel. Kuna antud juhul 0 jääb suurima ja vähima väärtuse vahele, siis kuskil peab vaadeldav funktsioon saavutama väärtuse 0. See tähendabki, et lõigul $[a, b]$ leidub vähemalt üks punkt $c$, kus $f(c) = 0$.

Omadusi 1 - 3 selgitatakse loengus.

# Peatükk 3

# Tuletis ja diferentsiaal

## 3.1 Diferentseeruva funktsiooni ja tuletise mõisted.

Olgu antud funktsioon $f$ ja kuulugu punkt $a$ selle funktsiooni määramispiirkonda.

**Tuletis ja diferentseeruv funktsioon.** Funktsiooni $f$ tuletiseks punktis $a$ nimetatakse järgmist suurust:

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}. \tag{3.1}$$

Kui funktsioon $f$ omab punktis $a$ lõplikku tuletist, siis öeldakse et ta on selles punktis diferentseeruv.

Tuletise arvutamist nimetatakse diferentseerimiseks.

Tuletist defineeriva piirväärtuse võib kirja panna ka argumendi muudu ja funktsiooni muudu kaudu. Olgu nii nagu ennegi

$$\begin{aligned} \Delta x &= x - a \quad - \quad \text{argumendi muut kohal } a, \\ \Delta y &= f(x) - f(a) \quad - \quad \text{funktsiooni muut kohal } a. \end{aligned}$$

Siis

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Funktsiooni diferentseeruvuse ja pidevuse vahel kehtib järgmine seos:

*Punktis $a$ diferentseeruv funktsioon on selles punktis pidev.*

*Tõestus*: Kuna punktis $a$ diferentseeruv funktsioon on määratud punktis $a$, siis jääb veel näidata et $\lim_{x \to a} f(x)$ eksisteerib ja võrdub arvuga $f(a)$. Kuid see järeldub järgmisest võrduste reast:

$$\begin{aligned} &\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} [f(x) - f(a)] + f(a) \\ &= \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \lim_{x \to a} (x - a) + f(a) = f'(a) \cdot 0 + f(a) = f(a). \end{aligned}$$

Vastupidine väide ei ole õige. Pidev funktsioon ei tarvitse diferentseeruv olla. Näiteks funktsioon $y = |x|$ on punktis $x = 0$ pidev, kuna $\lim\limits_{x\to 0}|x| = 0 = |0|$. Samas ei ole funktsioon $y = |x|$ nullpunktis diferentseeruv. Et seda näha, arvutame järgmised ühepoolsed piirväärtused: $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{|x|-|0|}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^-}\frac{-x}{x} = -1$ ja $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{|x|-|0|}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x}{x} = +1$. Kuna need on erinevad, siis piirväärtust $\lim\limits_{x\to 0}\frac{|x|-|0|}{x-0}$, mis määrab funktsiooni $y = |x|$ tuletise punktis $x = 0$, ei eksisteeri.

Järelikult on funktsiooni diferentseeruvus rangem tingimus kui pidevus.

Punktis $a$ diferentseeruva funktsiooni graafik on selles punktis sile joon (ei murdu).

**Tuletis kui funktsioon**. Kui funktsioon $f$ on diferentseeruv oma määramispiirkonna alamhulga $D$ kõigis punktides, siis öeldakse et see funktsioon on diferentseeruv hulgas $D$.

Olgu $f$ diferentseeruv hulgas $D$. Siis igale arvule $x$ hulgast $D$ vastab üks kindel reaalarv $f'(x)$. Seega on $f'$ funktsioon, mis on määratud hulgas $D$.

**Tuletise teisi tähistusi.** Funktsiooni $y = f(x)$ tuletist punktis $x$ võib veel tähistada sümbolitega

$$y'\,,\ y'(x)\,,\ \dot{y}\,,\ \dot{y}(x)\,,\ \dot{f}(x)\,.$$

Peale selle saab funktsiooni $y = f(x)$ tuletise esitada ka sõltuva muutuja $y$ ja argumendi $x$ diferentsiaalide $dy$ ja $dx$ jagatisena:

$$y' = \frac{dy}{dx}\,.$$

Selline seos tuletatakse edaspidi diferentsiaali mõiste käsitlemise juures §3.3.

**Põhiliste elementaarfunktsioonide tuletised.**

1) $C' = 0\,,\quad C$ − konstant ,

2) $(x^a)' = ax^{a-1}\,,$

3) $(a^x)' = a^x \ln a\,,$ sealhulgas $(e^x)' = e^x\,,$

4) $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x\ln a}\,,$ sealhulgas $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}\,,$

5) $(\sin x)' = \cos x\,,$

6) $(\cos x)' = -\sin x\,,$

7) $(\tan x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}\,,$

8) $(\cot x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}\,,$

9) $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,,$

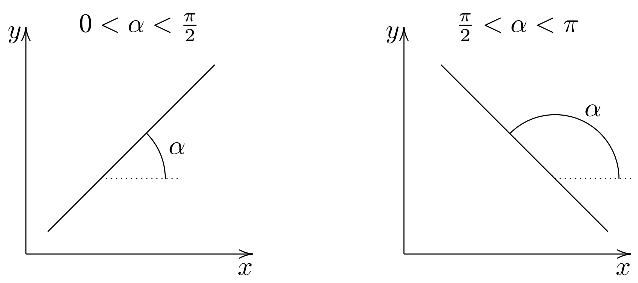
$$
\begin{aligned}
10)\quad (\arccos x)' &= -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,,\\
11)\quad (\arctan x)' &= \frac{1}{1+x^2}\,,\\
12)\quad (\operatorname{arccot} x)' &= -\frac{1}{1+x^2}\,.
\end{aligned}
$$

**Hüperboolsete trigonomeetriliste funktsioonide tuletised.**

$$
\begin{aligned}
13)\quad (\sinh x)' &= \cosh x\,,\\
14)\quad (\cosh x)' &= \sinh x\,,\\
15)\quad (\tanh x)' &= \frac{1}{\cosh^2 x}\,,\\
16)\quad (\coth x)' &= -\frac{1}{\sinh^2 x}\,,\\
17)\quad (\operatorname{arsinh} x)' &= \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,,\\
18)\quad (\operatorname{arcosh} x)' &= \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,,\\
19)\quad (\operatorname{artanh} x)' &= \frac{1}{1-x^2}\,,\\
20)\quad (\operatorname{arcoth} x)' &= \frac{1}{1-x^2}\,.
\end{aligned}
$$

## 3.2 Joone puutuja ja normaalsirge.

**Sirge tõusunurk ja tõus**. Tasandil $xy$ - teljestikus antud sirge $s$ tõusunurgaks $\alpha$ nimetatakse selle sirge ja $x$ - telje positiivse suuna vahelist nurka, mille väärtus radiaanides jääb poollõigule $[0, \pi)$. Tõusva sirge korral $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$ ja langeva sirge korral $\alpha \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ (vt joonis 3.1). Sirge $s$ tõusuks $p$ nimetatakse tema tõusunurga tangensit, st $p = \tan\alpha$.



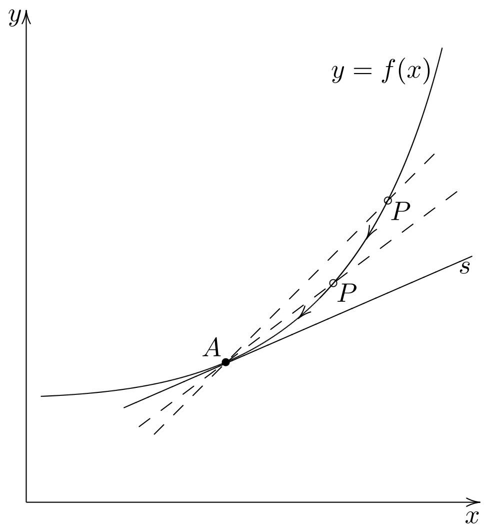

Joonis 3.1

Punkti $A = (a, b)$ läbiva ja tõusu $p$ omava sirge võrrand on

$$y - b = p(x - a)\,. \tag{3.2}$$

Viimane valem kehtib juhul, kui tõus $p$ on määratud, st $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$. Kui $\alpha = \frac{\pi}{2}$, siis on $p$ määramata (tinglikult võrdne $\infty$-ga). Viimasel juhul on $s$ paralleelne $y$ - teljega ja tema võrrand on $x = a$.

**Joone puutuja ja selle võrrand**. Olgu tasandil $xy$ - teljestikus antud joon $y = f(x)$ (st funktsiooni $y = f(x)$ graafik). Joone $y = f(x)$ puutujaks punktis $A$ nimetatakse tema lõikaja $AP$ piirsirget, mis tekib punkti $P$ lähenemisel punktile $A$ mööda joont $y = f(x)$ (vt joonis 3.2, puutuja on seal tähistatud $s$-ga).



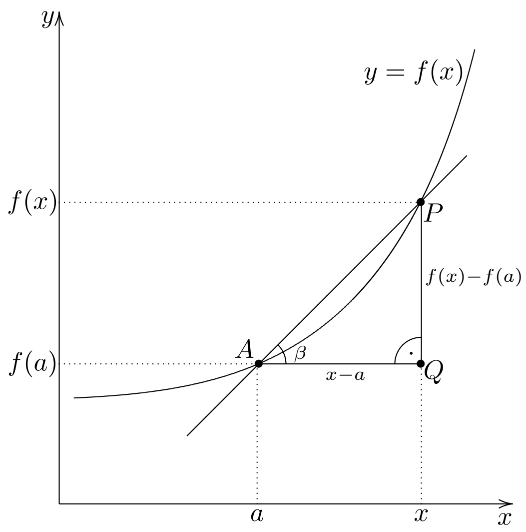

Joonis 3.2

Meie eesmärgiks on tuletada puutuja $s$ võrrand. Kõigepealt märgime, et valemi (3.2) põhjal avaldub puutuja $s$ võrrand punktis $A = (a, f(a))$ kujul

$$y - f(a) \;=\; p(x - a)\,, \tag{3.3}$$

kus $p$ on $s$ tõus. Momendil on $p$ veel tundmatu suurus. Avaldame suuruse $p$ funktsiooni $f$ tuletise kaudu. Selleks vaatleme joonist 3.3. Joonisel on lõikaja $AP$ tõusunurk tähistatud $\beta$-ga. Seega on lõikaja $AP$ tõus $\bar{p} = \tan\beta$. Täisnurkselt kolmnurgalt $APQ$ näeme, et

$$\bar{p} \;=\; \tan\beta = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}\,.$$




Joonis 3.3

Vaatleme nüüd piirprotsessi $x \to a$. Kui $x \to a$ siis $P$ läheneb punktile $A$ mööda joont $y = f(x)$. Vastavalt puutuja definitsioonile läheneb lõikaja $AP$ joone $y = f(x)$ puutujale punktis $A$. Seega läheneb ka lõikaja tõus $\bar{p}$ puutuja tõusule $p$. Järelikult, tuletise definitsiooni põhjal

$$p \;=\; \lim_{x\to a} \bar{p} \;=\; \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \;=\; f'(a)\,. \tag{3.4}$$

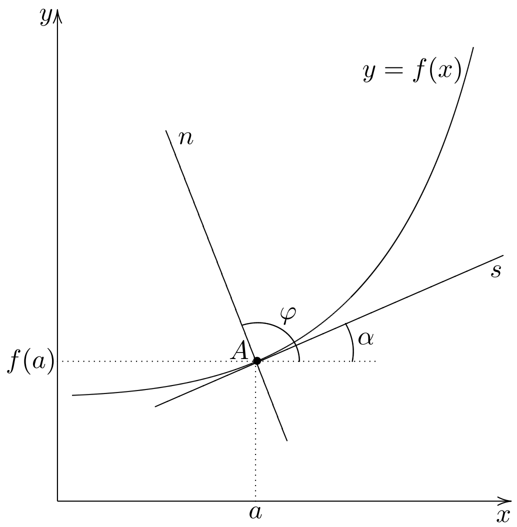
Valemitest (3.3) ja (3.4) saamegi puutuja võrrandi

$$y - f(a) \;=\; f'(a)(x - a)\,. \tag{3.5}$$

Valem (3.5) kehtib juhul kui puutuja tõus $p$ ehk tuletis $f'(a)$ on määratud. Kui puutuja tõusunurk on $\frac{\pi}{2}$ siis ei ole $f'(a)$ määratud ja puutuja võrrand on $x = a$.

**Joone normaalsirge ja selle võrrand**. Joone $y = f(x)$ normaalsirgeks punktis $A$ nimetatakse sirget, mis läbib punkti $A$ ja ristub joone $y = f(x)$ puutujaga selles punktis. Joonisel 3.4 on kujutatud joone $y = f(x)$ puutuja $s$ ja normaalsirge $n$ koos oma tõusunurkadega $\alpha$ ja $\varphi$. Normaalsirge võrrandi tuletamiseks peame arvutama tema tõusu $p = \tan\varphi$. Kuna $\varphi = \alpha + \frac{\pi}{2}$ ja $\tan\alpha = f'(a)$, siis

$$p = \tan\varphi = \tan\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{\tan\alpha} = -\frac{1}{f'(a)}\,. \tag{3.6}$$




Joonis 3.4

Valemite (3.6) ja (3.2) põhjal on punkti $A = (a, f(a))$ läbiva normaalsirge võrrand järgmine:

$$y - f(a) \;=\; -\frac{1}{f'(a)}(x-a)\,.$$

Muidugi kehtib selline võrrand juhul, kui $f'(a) \neq 0$. Kui $f'(a) = 0$, siis on normaalsirge $y$ - telje sihiline ja tema võrrand on $x = a$.

## 3.3 Funktsiooni diferentsiaal ja esimest järku lähend.

**Funktsiooni diferentsiaali mõiste.** Olgu antud funktsioon, mis on diferentseeruv punktis $a$. Eeldame, et $f'(a) \neq 0$. Kasutame taas järgmisi mõisteid:

$$\begin{aligned} \Delta x \;&=\; x - a \quad - \quad \text{argumendi muut kohal } a \\ \Delta y \;&=\; f(x) - f(a) \quad - \quad \text{funktsiooni muut kohal } a\,. \end{aligned}$$

Eelnevalt §3.1 me näitasime, et

$$f'(a) \;=\; \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}\,.$$

Seega, kui me tähistame $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ja $f'(a)$ vahe järgmiselt

$$\alpha(\Delta x) \;:=\; \frac{\Delta y}{\Delta x} \;-\; f'(a)\,, \tag{3.7}$$

kehtib võrdus

$$\lim_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x) \;=\; 0\,. \tag{3.8}$$

Meie eesmärk on avaldada funktsiooni muut $\Delta y$ tuletise $f'(a)$, argumendi muudu $\Delta x$ ja suuruse $\alpha(\Delta x)$ kaudu. Selleks avaldame kõigepealt võrdusest (3.7) suhte $\frac{\Delta y}{\Delta x}$:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \;=\; f'(a) + \alpha(\Delta x)$$

ja korrutame saadud avaldise $\Delta x$-ga. Saame valemi

$$\Delta y \;=\; f'(a)\Delta x \;+\; \alpha(\Delta x)\Delta x\,. \tag{3.9}$$

Valemist (3.9) näeme, et funktsiooni muut $\Delta y$ koosneb kahest liidetavast: $f'(a)\Delta x$ ja $\alpha(\Delta x)\Delta x$. Võrdleme neid liidetavaid suuruse $\Delta x$ suhtes protsessis $\Delta x \to 0$. Esiteks, eelduse $f'(a) \neq 0$ põhjal

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'(a)\Delta x}{\Delta x} \;=\; \lim_{\Delta x \to 0} f'(a) \;=\; f'(a) \;\neq\; 0\,.$$

Teiseks, (3.8) põhjal

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\alpha(\Delta x)\Delta x}{\Delta x} \;=\; \lim_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x) \;=\; 0\,.$$

Näeme, et esimene liidetav $f'(a)\Delta x$ funktsiooni muudu $\Delta y$ avaldises on sama järku lõpmatult väike suurus kui $\Delta x$ ja teine liidetav $\alpha(\Delta x)\Delta x$ on kõrgemat järku lõpmatult väike suurus $\Delta x$ suhtes. Järelikult hakkab väikese $\Delta x$ korral esimene liidetav $f'(a)\Delta x$ funktsiooni muudu avaldises domineerima.

Funktsiooni muudu $\Delta y$ peaosa $f'(a)\Delta x$ nimetatakse funktsiooni $y = f(x)$ *diferentsiaaliks* punktis $a$ ja tähistatakse $dy$ või $df$. Kui on vaja rõhutada diferentsiaali sõltuvust punktist $a$, siis kirjutatakse vastavalt $dy(a)$ või $df(a)$. Seega

$$dy \;=\; f'(a)\Delta x \tag{3.10}$$

ja

$$\Delta y \;\approx\; dy \quad \text{kui} \quad \Delta x \quad \text{on väike}\,. \tag{3.11}$$

Arvutame funktsiooni $y = x$ diferentsiaali $dx$. Kuna $(x)' = 1$, siis rakendades valemit (3.10) funktsiooni $y = x$ jaoks saame

$$dx \;=\; \Delta x\,.$$

Järelikult võrdub argumendi diferentsiaal argumendi muuduga. Olgu $y = f(x)$ jällegi suvaline funktsioon. Asendame $\Delta x$-i $dx$-iga valemis (3.10). Saame võrduse

$$dy \;=\; f'(a)dx\,. \tag{3.12}$$

Siit tuleneb järgmine valem tuletise jaoks diferentsiaalide suhte kaudu:

$$f'(a) \;=\; \frac{dy}{dx}\,. \tag{3.13}$$

**Funktsiooni esimest järku lähend.** Olgu funktsioon $y = f(x)$ diferentseeruv punkti $a$ mingis ümbruses $(a-\epsilon, a+\epsilon)$. Selle funktsiooni *nulljärku ehk konstantseks lähendiks* nimetatakse järgmist konstantset funktsiooni:

$$y \;=\; f(a)\,, \quad x \in (a-\epsilon, a+\epsilon)\,. \tag{3.14}$$

Kuna $f$ on diferentseeruv, siis on ta ka pidev (vt. §3.1) ning seetõttu väikese ümbruse ehk väikese $\epsilon$-i korral kehtib ligikaudne võrdus $f(x) \approx f(a)$, kui $x \in (a-\epsilon, a+\epsilon)$.

Defineerime nüüd uue lähendi $P_1$ liites $f(a)$-le juurde funktsiooni $f$ diferentsiaali punktis $a$. Saame

$$P_1(x) \;=\; f(a) + dy(a)\,, \quad x \in (a-\epsilon, a+\epsilon)\,. \tag{3.15}$$

Kasutades diferentsiaali valemit (3.10) ja võrdust $\Delta x = x - a$ saame kirjutada $P_1$ järgmisel kujul:

$$P_1(x) \;=\; f(a) + f'(a)(x-a)\,, \quad x \in (a-\epsilon, a+\epsilon)\,. \tag{3.16}$$

Näeme, et $P_1$ on lineaarne funktsioon. Funktsiooni $P_1$ nimetatakse funktsiooni $f$ *esimest järku ehk lineaarseks lähendiks* punkti $a$ ümbruses.

Võrdleme null- ja esimest järku lähendite täpsust. Selleks toome sisse järgmised tähised nende lähendite vigade jaoks:

$$\begin{aligned} R_0(x) &= f(x) - f(a) \quad &&- \quad \text{nulljärku lähendi viga}\,, \\ R_1(x) &= f(x) - P_1(x) \quad &&- \quad \text{esimest järku lähendi viga}\,. \end{aligned}$$

Kasutades valemit (3.16) arvutame:

$$\begin{aligned} &\lim_{x\to a} \frac{R_1(x)}{R_0(x)} \;=\; \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a) - f'(a)(x-a)}{f(x) - f(a)} \\ &= \lim_{x\to a} \left[1 - f'(a)\frac{x-a}{f(x)-f(a)}\right] \;=\; \left[1 - \frac{f'(a)}{\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}}\right] \\ &= 1 - \frac{f'(a)}{f'(a)} \;=\; 0\,. \end{aligned}$$

Seega on $R_1$ kõrgemat järku lõpmatult väike suurus $R_0$ suhtes protsessis $x \to a$. Järelikult, kui $x$ on $a$-le lähedal, siis on esimest järku lähend täpsem kui nulljärku lähend.

## 3.4 Tuletiste arvutamise põhireeglid. Diferentsiaali omadused.

1. $(f+g)' \;=\; f' + g'$,
2. $(fg)' \;=\; f'g + fg'$,
3. $\left(\frac{f}{g}\right)' \;=\; \frac{f'g - fg'}{g^2}$.

Tõestame näiteks reegli 2. Kasutades tuletise definitsiooni ja piirväärtuste omadusi saame

$$
\begin{aligned}
(fg)'(x) \;&=\; \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)g(x+\Delta x) - f(x)g(x)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x}\Big\{[f(x+\Delta x) - f(x)]g(x+\Delta x) + f(x)[g(x+\Delta x) - g(x)]\Big\} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \lim_{\Delta x \to 0} g(x+\Delta x) + f(x) \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} \\
&= f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \;=\; (f'g + fg')(x)\,.
\end{aligned}
$$

Sellega ongi reegel 2 tõestatud.

Reeglitest 1 ja 2 järelduvad veel 2 lihtsat valemit:

4. $(Cf)' \;=\; C'f + C\,f' \;=\; 0\,f + C\,f' \;=\; C\,f'\,, \quad C\,-$ konstant,
5. $(f-g)' \;=\; [f + (-1)g]' \;=\; f' + [(-1)g]' \;=\; f' + (-1)g' \;=\; f' - g'$.

Järgnevalt tuletame valemeid liitfunktsiooni diferentseerimiseks. Olgu $y = f(x)$ ja $z = g(y)$ kaks diferentseeruvat funktsiooni ning olgu nendest moodustatud liitfunktsioon $z = g[f(x)]$. Tuletame meelde, et funktsiooni tuletise saab esitada sõltuva muutuja ja argumendi diferentsiaalide jagatisena (valem (3.13). Kuna funktsiooni $f$ argument on $x$ ja sõltuv muutuja $y$, siis kirjutades valemi (3.13 üles punktis $x$ saame $f'(x) = \frac{dy}{dx}$. Analoogiliselt toimime ka funktsiooniga $g$, mille argument on $y$ ja sõltuv muutuja $z$. Esitame $g$ tuletise sõltuva muutuja ja argumendi diferentsiaalide jagatisena. Saame $g'(y) = \frac{dz}{dy}$. Viimaks avaldame ka liitfunktsiooni $z = g[f(x)]$ tuletise tema argumendi on $x$ ja sõltuva muutuja $z$ diferentsiaalide jagatisena. Saame $\{g[f(x)]\}' = \frac{dz}{dx}$. Kasutades neid valemeid arvutame:

$$
\{g[f(x)]\}' \;=\; \frac{dz}{dx} \;=\; \frac{dz\,dy}{dy\,dx} \;=\; \frac{dz}{dy}\,\frac{dy}{dx} \;=\; g'(y)f'(x) \;=\; g'[f(x)]\,f'(x)\,.
$$

Seega oleme tõestanud järgmised reeglid liitfunktsiooni tuletise jaoks:

6. $\frac{dz}{dx} \;=\; \frac{dz}{dy}\,\frac{dy}{dx}$ ehk $\{g[f(x)]\}' \;=\; g'[f(x)]\,f'(x)$.

**Diferentsiaali omadused.**

1. $d(u+v) = du + dv,$

2. $d(u-v) = du - dv,$

3. $d(uv) = vdu + udv,$

4. $d(Cu) = Cdu\,, \quad C$ – konstant,

5. $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu-udv}{v^2} \quad$ kui $\quad v \neq 0.$

Need omadused järelduvad vahetult tuletiste arvutamise põhireeglitest 1 - 5. Näiteks tuletiste arvutamise põhireegli 2 ja diferentsiaali valemi $df = f'dx$ (valem (3.12)) põhjal

$$d(uv) = (uv)'dx = (u'v + v'u)dx = v\,u'dx + u\,v'dx = vdu + udv\,,$$

mis tõestab omaduse 3.

## 3.5 Ilmutamata funktsiooni, pöördfunktsiooni ja parameetriliselt antud funktsiooni diferentseerimine.

**Ilmutamata kujul antud funktsiooni diferentseerimine.** Olgu vaatluse all funktsioon $y = f(x)$, mis on antud ilmutamata kujul võrrandiga $F(x, y) = 0$. Funktsiooni $f$ ilmutamiseks tuleb lahendada võrrand $F(x, y) = 0$ muutuja $y$ suhtes. Sageli on see väga raske ülesanne.

Õnneks saab ilmutamata kujul antud funktsiooni diferentseerida ka nii, et teda ei ole vaja eelnevalt ilmutada. Tuletise võib arvutada otseselt, lähtudes funktsiooni määravast võrrandist $F(x, y) = 0$. Sealjuures tuleb aga arvestada asjaolu, et kõik $y$-it sisaldavad liikmed selles võrrandis on liitfunktsioonid, mille sisemiseks funktsiooniks on $y = f(x)$.

Kirjeldame näiteks võrrandiga

$$\sin y - x + \cos x - y = 0 \tag{3.17}$$

määratud funktsiooni $y = f(x)$ diferentseerimise protseduuri. Võrrand (3.17) on liiga keeruline selleks, et teda lahendada $y$ suhtes ja seejärel arvutada $y'$ otseselt funktsiooni $f$ avaldisest. Arvutame $y'$ kaudselt. Selleks on kaks sisuliselt samaväärset, kuid formaalselt pisut erinevat võimalust. Esimese lähenemisviisi korral asendame kõigepealt võrrandis (3.17) suuruse $y$ suurusega $f(x)$. Saame

$$\sin f(x) - x + \cos x - f(x) = 0\,.$$

Arvutame nüüd tuletise kasutades §3.1 toodud valemeid ja §3.4 esitatud liitfunktsiooni diferentseerimise eeskirja. Saame

$$\cos f(x)\, f'(x) - 1 - \sin x - f'(x) = 0\,.$$

Avaldades sellest seosest $f'(x)$ ongi meil tuletis käes:

$$f'(x) \;=\; \frac{1+\sin x}{\cos f(x) - 1} \;=\; \frac{1+\sin x}{\cos y - 1}\,. \tag{3.18}$$

Teine ja lihtsam võimalus on selline, et me ei asenda võrrandis (3.17) $y$-it $f(x)$-ga, vaid diferentseerimisel peame meeles, et $y$-it sisaldavad funktsioonid on liitfunktsioonid. Arvutame:

$$\cos y\, y' - 1 - \sin x - y' \;=\; 0\,.$$

Avaldades siit $y'$ saame

$$y' \;=\; \frac{1+\sin x}{\cos y - 1}\,,$$

mis langeb kokku eelnevalt arvutatud tulemusega (3.18).

**Üksühese funktsiooni pöördfunktsiooni diferentseerimine.**

*Olgu üksühese funktsiooni $y = f(x)$ pöördfunktsioon $x = g(y)$. Siis kehtib valem*

$$g'[f(x)] \;=\; \frac{1}{f'(x)}\,. \tag{3.19}$$

*Tõestus*: Funktsiooni $f$ argument on $x$ ja sõltuv muutuja $y$. Seega $f'(x) = \frac{dy}{dx}$. Pöördfunktsiooni $x = g(y)$ argument on $y$ ja sõltuv muutuja $x$. Järelikult $g'(y) = \frac{dx}{dy}$. Kasutades neid valemeid arvutame:

$$g'[f(x)] \;=\; g'(y) \;=\; \frac{dx}{dy} \;=\; \frac{1}{\frac{dy}{dx}} \;=\; \frac{1}{f'(x)}\,.$$

Olemegi tõestanud valemi (3.19).

**Parameetriliselt antud funktsiooni diferentseerimine**.

*Olgu funktsioon $y = f(x)$ antud parameetrilisel kujul võrranditega*

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t). \end{cases}$$

*Siis kehtib valem*

$$f'(x) \;=\; \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\,. \tag{3.20}$$

*Tõestus*: Funktsiooni $f$ argument on $x$ ja sõltuv muutuja $y$. Seega $f'(x) = \frac{dy}{dx}$. Funktsiooni $x = \varphi(t)$ argument on $t$ ja sõltuv muutuja $x$. Järelikult $\varphi'(t) = \frac{dx}{dt}$. Analoogiliselt saame funktsiooni $y = \psi(t)$, mille argument on $t$ ja sõltuv muutuja $y$, tuletise jaoks seose $\psi'(t) = \frac{dy}{dt}$. Kasutades neid valemeid arvutame:

$$f'(x) \;=\; \frac{dy}{dx} \;=\; \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} \;=\; \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\,.$$

See tõestabki valemi (3.20).

## 3.6 Keskväärtusteoreemid.

**Rolle'i teoreem**. *Kui funktsioon $f$ on lõigul $[a, b]$ pidev, vahemikus $(a, b)$ diferentseeruv ja rahuldab tingimust $f(a) = f(b)$, siis leidub vahemikus $(a, b)$ vähemalt üks punkt $c$ nii, et $f'(c) = 0$.*

*Tõestus*: Kuna $f(x)$ on pidev lõigul $[a, b]$, siis saavutab ta oma suurima ja vähima väärtuse sellel lõigul (vt lõigul pidevate funktsioonide omadus 1 §2.11). Olgu $M$ suurim väärtus ja $m$ vähim väärtus. Kui $M = m$, siis on funktsioon lõigul $[a, b]$ konstantne, st kõigi $x \in [a, b]$ korral $f(x) = M = m$. Sellisel juhul on $f(x)$ tuletis nullfunktsioon, st $f'(x) \equiv 0$, ja teoreemi väide on täidetud iga $c \in (a, b)$ korral.

Edasi vaatleme juhtu, kui $M \neq m$. Funktsioon võib oma ekstremaalse (so suurima või vähima) väärtuse saavutada kas lõigu $[a, b]$ otspunktis või vahemikus $(a, b)$. Oletame, et mõlemad ekstremaalsed väärtused saavutatakse lõigu otspunktides $a$ ja $b$. Siis on ühes otspunktis $f(x)$ väärtus $M$ ja teises otspunktis $m$. Võrratusest $M \neq m$ tuleneb siis, et $f(x)$ väärtused lõigu otspunktides on erinevad. Kuid me eeldasime, et funktsiooni väärtused lõigu otspunktides on võrdsed (tingimus $f(a) = f(b)$). Järelikult ei saa mõlemad ekstreemumid paikneda lõigu otspunktides. Funktsioon $f(x)$ peab vähemalt ühe oma ekstremaalsetest väärtustest (kas suurima või vähima) saavutama vahemikus $(a, b)$.

Analüüsime juhtu, kui $f(x)$ saavutab oma suurima väärtuse vahemikus $(a, b)$. Olgu $c \in (a, b)$ selline punkt, kus suurim väärtus saavutatakse, st $f(c) = M$. Vastavalt suurima väärtuse definitsioonile kehtib iga $\Delta x$ korral võrratus $f(c) \geq f(c + \Delta x)$. Seega iga $\Delta x$ korral

$$f(c + \Delta x) - f(c) \leq 0\,. \tag{3.21}$$

Kui $\Delta x > 0$, siis võrratusest (3.21) järeldub, et

$$\frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x} \leq 0.$$

See võrratus jääb kehtima ka siis, kui me võtame temast piirväärtuse protsessis $\Delta x \to 0$. Järelikult

$$f'(c) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x} \leq 0. \tag{3.22}$$

Kui $\Delta x < 0$, siis võrratusest (3.21) järeldub, et

$$\frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x} \geq 0.$$

Võttes piirväärtuse saame

$$f'(c) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x} \geq 0. \tag{3.23}$$

Võrratuste (3.22) ja (3.23) põhjal $f'(c) \leq 0$ ja $f'(c) \geq 0$. Seega $f'(c) = 0$ ning teoreemi väide on tõestatud.

Analoogiliselt saab käsitleda juhtu, funktsioon $f(x)$ saavutab vähima väärtuse vahemikus $(a, b)$.

**Lagrange'i teoreem**. *Kui funktsioon $f$ on lõigul $[a, b]$ pidev ja vahemikus $(a, b)$ diferentseeruv, siis leidub vahemikus $(a, b)$ vähemalt üks punkt $c$ nii, et*

$$f(b) - f(a) \; = \; f'(c)(b - a)\,. \tag{3.24}$$

*Tõestus*: Defineerime järgmise muutujast $x$ sõltuva funktsiooni:

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)\,. \tag{3.25}$$

Arvutame:

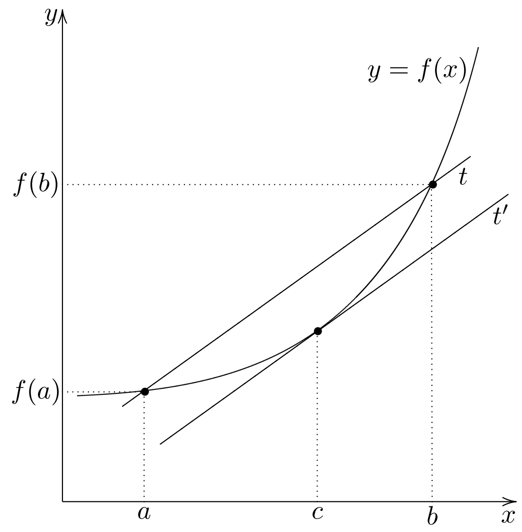
$$F(a) = f(a) - f(a) - \tfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(a - a) = 0,$$
$$F(b) = f(b) - f(a) - \tfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(b - a) = f(b) - f(a) - [f(b) - f(a)] = 0.$$

Seega $F(a) = F(b)$. Teoreemi eelduste põhjal on $F(x)$ pidev lõigul $[a, b]$ ja diferentseeruv vaheminus $(a, b)$. Järelikult rahuldab $F(x)$ Rolle'i teoreemi eeldusi. Rolle'i teoreemi põhjal leidub vahemikus $(a, b)$ vähemalt üks punkt $c$ nii, et $F'(c) = 0$. Leiame valemist (3.25) funktsiooni $F(x)$ tuletise:

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Seega omandab võrdus $F'(c) = 0$ kuju $f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0$. Siit saame $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. Korrutades teguriga $b-a$ saame valemi (3.24). Teoreem on tõestatud.

Lagrange'i teoreemil on lihtne geomeetriline sisu. Vaatleme joonist 3.5. Punktidest $(a, f(a))$ ja $(b, f(b))$ läbi tõmmatud lõikaja $t$ tõus võrdub suhtega $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. Viime paralleellükkega sirge $t$ uude asendisse nii, et saadud paralleelne sirge $t'$ oleks joone $y = f(x)$ puutuja. Tähistame puutepunkti $x$-koordinaadi $c$-ga. Kuna funktsiooni graafiku puutuja tõus võrdub funktsiooni tuletisega vaadeldavas punktis, siis sirge $t'$ tõus on $f'(c)$. Kuna sirged $t$ ja $t'$ on paralleelsed, siis on nende tõusud omavahel võrdsed, seega $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$. Viimane on samaväärne valemiga (3.24).




Joonis 3.5

**Cauchy teoreem**. *Kui funktsioonid $f$ ja $g$ on lõigul $[a, b]$ pidevad, vahemikus $(a, b)$ diferentseeruvad ja iga $x \in (a, b)$ korral kehtib võrratus $g'(x) \neq 0$, siis leidub vahemikus $(a, b)$ vähemalt üks punkt $c$ nii, et*

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} .$$

*Tõestus*: Tõestus sarnaneb Lagrange'i teoreemi tõestusega. Defineerime järgmise funktsiooni:

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}(g(x) - g(a)) . \tag{3.26}$$

Arvutame:

$$F(a) = f(a) - f(a) - \tfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}(g(a) - g(a)) = 0,$$

$$F(b) = f(b) - f(a) - \tfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}(g(b) - g(a)) = f(b) - f(a) - [f(b) - f(a)] = 0.$$

Seega $F(a) = F(b)$. Ühtlasi on $F(x)$ pidev lõigul $[a, b]$ ja diferentseeruv vaheminus $(a, b)$. Järelikult rahuldab $F(x)$ Rolle'i teoreemi eeldusi. Rolle'i teoreemi põhjal leidub vahemikus $(a, b)$ vähemalt üks punkt $c$ nii, et $F'(c) = 0$. Valemist (3.26) saame funktsiooni $F(x)$ tuletise:

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(x).$$

Seega $f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} g'(c) = 0$. Siit järeldub, et $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} g'(c)$. Jagades suurusega $g'(c)$ saame valemi (3.26). Teoreem on tõestatud.

Märgime, et Lagrange'i teoreem on erijuht Cauchy teoreemist, kui $g(x) = x$.

## 3.7 l'Hospitali reegel.

l'Hospitali reegel on abivahend $\frac{0}{0}$ ja $\frac{\infty}{\infty}$ tüüpi määramatusi sisaldavate piirväärtuste arvutamisel. Sõnastame ja tõestame selle reegli konkreetselt juhu $\frac{0}{0}$ jaoks.

**l'Hospitali reegel**. *Olgu funktsioonid $f$ ja $g$ diferentseeruvad punkti $a$ mingis ümbruses, kusjuures $g'(x) \neq 0$ iga $x$ korral sellest ümbrusest. Peale selle, olgu*

$$f(a) = g(a) = 0.$$

*Kui eksisteerib piirväärtus $\lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, siis eksisteerib ka piirväärtus $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ ja kehtib valem*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \tag{3.27}$$

*Tõestus*: Valime suvalise punkti $x \neq a$ teoreemi sõnastuses mainitud arvu $a$ ümbrusest. Tekib kaks võimalust:

1. $x > a$. Siis Cauchy teoreemi põhjal leidub vahemikus $(a, x)$ punkt $c$ nii, et

$$\frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}. \tag{3.28}$$

2. $x < a$. Jällegi, Cauchy teoreemi põhjal leidub vahemikus $(x, a)$ punkt $c$ nii, et

$$\frac{f(a) - f(x)}{g(a) - g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}. \tag{3.29}$$

Kuna eelduse kohaselt $f(a) = g(a) = 0$, siis nii valemist (3.28) kui (3.29) järeldub võrdus

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}. \tag{3.30}$$

Kui $x \to a$, siis $c \to a$, sest $c$ paikneb $x$ ja $a$ vahel. Järelikult (3.30) põhjal

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(c)}{g'(c)} = \lim_{c\to a} \frac{f'(c)}{g'(c)}. \tag{3.31}$$

Muudame avaldise (3.31) paremal poolel asuva piirväärtuse $\lim\limits_{c\to a} \frac{f'(c)}{g'(c)}$ tähistust asendades seal muutuja $c$ muutujaga $x$, st $\lim\limits_{c\to a} \frac{f'(c)}{g'(c)}$ asemel kirjutame $\lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. Tulemusena saame valemi (3.27). Eelduse kohaselt eksisteerib valemi (3.27) paremal poolel olev piirväärtus $\lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. Järelikult eksisteerib ka vasakul pool olev piirväärtus $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$. Teoreem on tõestatud.

**Märkusi.**

1. l'Hospitali reegel jääb kehtima ka siis, kui piirprotsess $x \to a$ asendada piirprotsessiga $x \to -\infty$ või $x \to \infty$.

2. l'Hospitali reegel on rakendatav ka $\frac{\infty}{\infty}$ tüüpi määramatuse korral. Sellisel juhul tuleb tema eeldustes esinevad võrdused $f(a) = g(a) = 0$ asendada võrdustega $\lim\limits_{x\to a} |f(x)| = \lim\limits_{x\to a} |g(x)| = \infty$.

3. l'Hospitali reeglit saab rakendada murrule $\frac{f(a)}{g(a)}$ ainult siis, kui seal tõesti esineb määramatus $\frac{0}{0}$ või $\frac{\infty}{\infty}$. Kui funktsioon $\frac{f(x)}{g(x)}$ on punktis $a$ määratud, siis l'Hospitali reeglit kasutada ei saa.

## 3.8 Kõrgemat järku tuletised ja diferentsiaalid.

**Kõrgemat järku tuletised.** Olgu funktsioon $y = f(x)$ diferentseeruv hulgas $D$. Siis on tema tuletis $f'$ hulgas $D$ määratud funktsioon. Oletame, et $f'$ on samuti diferentseeruv hulgas $D$. Siis saame me arvutada funktsiooni $f'$ tuletise ehk funktsiooni $f$ teise tuletise, mida tähistatakse $f''$. Seda protseduuri võib jätkata. Funktsiooni $f$ teise tuletise diferentseerimisel saame selle funktsiooni kolmanda tuletise $f'''$ jne.

Funktsiooni $y = f(x)$ $n$-järku tuletiseks nimetatakse selle funktsiooni $n - 1$ - järku tuletise tuletist ja tähistatakse $f^{(n)}$. $n$-järku tuletist omavat funktsiooni nimetatakse $n$-korda diferentseeruvaks.

Kui funktsioonil on olemas kõik tuletised $f^{(n)}$, kus $n = 1, 2, 3, \ldots$, siis nimetatakse seda funktsiooni lõpmata arv kordi diferentseeruvaks.

Neljandat ja kõrgemat järku tuletisi võib tähistada ka rooma numbritega. Näiteks $f^{IV}$ on neljandat järku tuletis, $f^{VII}$ on seitsmendat järku tuletis jne.

Kui funktsioon on esitatud kujul $y = y(x)$, st funktsiooni ja sõltuva muutuja jaoks kasutatakse samu tähiseid, siis tuletisi märkivad ülaindeksid liidetakse sõltuva muutujaga $y$. Näiteks, esimene tuletis on $y'$, teine tuletis $y''$, $n$-järku tuletis $y^{(n)}$ jne.

**Kõrgemat järku diferentsiaalid.** §3.3 tuletasime valemi $dy(a) = f'(a)dx$ funktsiooni $y = f(x)$ diferentsiaali jaoks. Vaatleme seda valemit punktis $x$:

$$dy(x) = f'(x)dx\,. \tag{3.32}$$

Diferentsiaal on muutujast $x$ sõltuv reaalarvuline suurus, seega argumendi $x$ funktsioon. Järelikult võib diferentsiaalist, kui ta on piisavalt heade omadustega, uuesti diferentsiaali arvutada. Niiviisi saame me funktsiooni $f$ teist järku diferentsiaali. Seda tähistatakse $d^2y$.

Tuletame valemi teist järku diferentsiaali jaoks. Kasutades võrdust (3.32) arvutame:

$$d^2y(x) = d[dy(x)] = d[f'(x)dx] = d[f'(x)]\,dx = [f'(x)]'dx\,dx = f''(x)dx^2\,.$$

Seega

$$d^2y(x) = f''(x)dx^2\,. \tag{3.33}$$

Võttes teist järku diferentsiaalist diferentsiaali saame kolmandat järku diferentsiaali $d^3y$. Kasutades juba tuletatud valemeid (3.32) ja (3.33) arvutame:

$$\begin{aligned} d^3y(x) &= d[d^2y(x)] = d[f''(x)dx^2] \\ &= d[f''(x)]\,dx^2 = [f''(x)]'dx\,dx^2 = f'''(x)dx^3\,. \end{aligned}$$

Järelikult

$$d^3y(x) = f'''(x)dx^3\,.$$

Seda protseduuri võib jätkata.

Funktsiooni $y = f(x)$ $n$-järku diferentsiaaliks nimetatakse selle funktsiooni $n-1$ - järku diferentsiaali diferentsiaali ja tähistatakse. $d^n y$. Kehtib valem

$$d^n y(x) = f^{(n)}(x) dx^n .$$

Lõpuks märgime, et jagades selle võrduse mõlemaid pooli suurusega $dx^n$ saame me järgmise seose $n$-järku tuletise jaoks:

$$\frac{d^n y}{dx^n} = f^{(n)}(x) .$$

## 3.9 Taylori ja McLaurini valemid.

**Taylori polünoom.**

§3.3 käsitlesime mõisteid funktsiooni null- ja esimest järku lähend. Käesolevas paragrahvis jätkame taoliste lähendite käsitlemist kõrgemal tasemel. Nimelt vaatleme me funktsiooni $n$-järku lähendit, mida nimetatakse selle funktsiooni Taylori polünoomiks.

Kõigepealt teeme mõned olulised täiendavad märkused null- ja esimest järku lähendi kohta. Kui funktsiooni $f$ kohta on teada tema väärtus kohal $a$, st $f(a)$, siis saame seda funktsiooni arvu $a$ ümbruses lähendada konstantse (nulljärku) lähendiga $f(a)$. Kui funktsiooni $f$ kohta on rohkem informatsiooni, nimelt lisaks $f(a)$ on teada ka $f'(a)$, siis saab seda funktsiooni punkti $a$ ümbruses lähendada juba esimest järku lähendiga $P_1(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$ (valem (3.16)). Vaatame kuidas on esimest järku lähendi ja tema tuletise väärtused punktis $a$ seotud etteantud suurustega $f(a)$ ja $f'(a)$. Kui $P_1(x)$ valemis panna muutuja $x$ võrduma $a$-ga, siis saame võrduse $P_1(a) = f(a)$. Diferentseerides funktsiooni $P_1(x)$ tuletame seose $P_1'(x) = f'(a)$, millest järeldub, et $P_1'(a) = f'(a)$. Kokkuvõttes saame järgmised võrdused:

$$P_1(a) = f(a) , \quad P_1'(a) = f'(a) . \tag{3.34}$$

Seega on $P_1$ lineaarne funktsioon ehk esimese astme polünoom, mis koos oma esimest järku tuletisega langeb punktis $a$ kokku funktsiooniga $f$.

Arutleme nüüd üldisemalt. Eeldame, et $f$ on lõpmata arv kordi diferentseeruv punkti $a$ mingis ümbruses. Oletame, et selle funktsiooni kohta on teada tema väärtus ja tuletised kuni järguni $n$ punktis $a$, st $f(a), f'(a), \ldots, f^{(n)}(a)$. Püstitame järgmise ülesande: leida $n$-astme polünoom $P_n$, mis koos oma tuletistega kuni järguni $n$ langeb punktis $a$ kokku funktsiooniga $f$, st rahuldab tingimusi

$$P_n(a) = f(a) , \quad P_n'(a) = f'(a) , \ \ldots , \ P_n^{(n)}(a) = f^{(n)}(a) . \tag{3.35}$$

Otsime meid huvitavat polünoomi järgmisel kujul:

$$\begin{aligned} P_n(x) &= C_0 + C_1(x-a) + C_2(x-a)^2 + C_3(x-a)^3 \\ &\quad + C_4(x-a)^4 + \ldots + C_n(x-a)^n , \end{aligned} \tag{3.36}$$

kus $C_0, C_1, \ldots, C_n$ on konstantsed kordajad. Nende kordajate määramiseks arvutame kõigepealt $P_n$ tuletised kuni järguni $n$:

$$\begin{aligned}
P_n'(x) &= 1C_1 + 2C_2(x-a) + 3C_3(x-a)^2 + 4C_4(x-a)^3 \\
&\quad + \ldots + nC_n(x-a)^{n-1}, \\
P_n''(x) &= 2\cdot 1C_2 + 3\cdot 2C_3(x-a) + 4\cdot 3C_4(x-a)^2 \\
&\quad + \ldots + n(n-1)C_n(x-a)^{n-2}, \\
P_n'''(x) &= 3\cdot 2\cdot 1C_3 + 4\cdot 3\cdot 2C_4(x-a) \\
&\quad + \ldots + n(n-1)(n-2)C_n(x-a)^{n-3}, \\
&\quad . \\
&\quad . \\
&\quad . \\
P_n^{(n)}(x) &= n(n-1)(n-2)\cdot \ldots \cdot 2\cdot 1C_n .
\end{aligned}$$

Pannes neis avaldistes ja valemis (3.36) muutuja $x$ võrduma $a$-ga saame

$$\begin{aligned}
&P_n(a) = C_0\,, \ \ P_n'(a) = 1!\,C_1\,, \ \ P_n''(a) = 2!\,C_2\,, \\
&P_n'''(a) = 3!\,C_3\,, \ \ldots, \ P_n^{(n)}(a) = n!\,C_n\,.
\end{aligned}$$

Sümbol $n!$ tähistab arvu $n$ faktoriaali: $n! = 1\cdot 2\cdot \ldots \cdot n$. Kasutades tingimusi (3.35) tuletame järgmised valemid kordajate $C_0, C_1, \ldots, C_n$ jaoks:

$$\begin{aligned}
&C_0 = f(a)\,, \ \ C_1 = \frac{f'(a)}{1!}\,, \ \ C_2 = \frac{f''(a)}{2!}\,, \\
&C_3 = \frac{f'''(a)}{3!}\,, \ \ldots, \ C_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}\,.
\end{aligned}$$

Seega saame valemi (3.36) kirjutada järgmisel kujul:

$$\begin{aligned}
P_n(x) &= f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 \\
&\quad + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n\,. \qquad (3.37)
\end{aligned}$$

Polünoomi $P_n$ nimetatakse funktsiooni $f$ *Taylori polünoomiks ehk $n$-järku lähendiks* punkti $a$ ümbruses.

**Taylori valem ja selle jääkliige.**
Funktsiooni $f(x)$ erinevust oma Taylori polünoomist iseloomustab järgmine suurus:

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x). \qquad (3.38)$$

Püstitame eesmärgiks avaldada $R_n(x)$ funktsiooni $f(x)$ kaudu ja hinnata teda. Selleks kirjutame $R_n(x)$ üles järgmiselt:

$$R_n(x) = \frac{Q(x)}{(n+1)!}(x-a)^{(n+1)}\,, \qquad (3.39)$$

kus $Q(x)$ on uus tundmatu funktsioon. Alljärgnevalt tegeleme funktsiooni $Q(x)$ avaldamisega.

Valemist (3.38) saame $f(x) = P_n(x) + R_n(x)$ ning seoseid (3.37) ja (3.39) arvestades

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 \qquad (3.40) \\ &+\frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{Q(x)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}. \end{aligned}$$

Defineerime järgmise muutujast $t$ sõltuva abifunktsiooni:

$$\begin{aligned} F(t) &= f(x) - f(t) - \frac{f'(t)}{1!}(x-t) - \frac{f''(t)}{2!}(x-t)^2 \qquad (3.41) \\ &-\frac{f'''(t)}{3!}(x-t)^3 - \ldots - \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n - \frac{Q(x)}{(n+1)!}(x-t)^{n+1}. \end{aligned}$$

Suurus $x$ esineb funktsiooni $F(t)$ valemis konstandina. Arvutame funktsiooni $F(t)$ tuletise. Märkides, et $\left[-\frac{f^{(i)}(t)}{i!}(x-t)^i\right]' = \frac{f^{(i)}(t)}{i!}i(x-t)^{i-1} - \frac{f^{(i+1)}(t)}{i!}(x-t)^i$, saame

$$\begin{aligned} F'(t) &= -f'(t) + f'(t) - \frac{f''(t)}{1!}(x-t) + \frac{f''(t)}{2!}2(x-t) - \frac{f'''(t)}{2!}(x-t)^2 \\ &+\frac{f'''(t)}{3!}3(x-t)^2 - \frac{f^{IV}(t)}{3!}(x-t)^3 + \qquad (3.42) \\ &+\ldots + \frac{f^{(n)}(t)}{n!}n(x-t)^{n-1} - \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n + \frac{Q(x)}{(n+1)!}(n+1)(x-t)^n. \end{aligned}$$

Kuna $\frac{i}{i!} = \frac{1}{(i-1)!}$ saame

$$\begin{aligned} F'(t) &= -f'(t) + f'(t) - \frac{f''(t)}{1!}(x-t) + \frac{f''(t)}{1!}(x-t) - \frac{f'''(t)}{2!}(x-t)^2 \\ &+\frac{f'''(t)}{2!}(x-t)^2 - \frac{f^{IV}(t)}{3!}(x-t)^3 + \qquad (3.43) \\ &+\ldots + \frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!}(x-t)^{n-1} - \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n + \frac{Q(x)}{n!}(x-t)^n. \end{aligned}$$

Näeme, et $F'(t)$ avaldises koonduvad liidetavad paarikaupa välja. Järele jäävad vaid 2 viimast liidetavat. Seega

$$F'(t) = -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n + \frac{Q(x)}{n!}(x-t)^n. \qquad (3.44)$$

Arvutame funktsiooni $F$ väärtused punktides $x$ ja $a$. Andes valemis (3.41) muutujale $t$ väärtuse $x$ saame $F(x) = 0$. Järgmiseks anname selles valemis muutujale $t$ väärtuse $a$:

$$\begin{aligned} F(a) \;&=\; f(x) - f(a) - \frac{f'(a)}{1!}(x-a) - \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 \qquad (3.45)\\ &-\frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 - \ldots - \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \;-\; \frac{Q(x)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}\,. \end{aligned}$$

Asendades siin liidetava $f(x)$ valemi (3.40) põhjal saame $F(a) = 0$. Kuna $F(x) = F(a) = 0$, siis Rolle'i teoreemi põhjal leidub punktide $x$ ja $a$ vahel punkt $c$ nii, et $F'(c) = 0$.

Täpsemalt: kui $x < a$, siis on funktsiooni $F(t)$ jaoks Rolle'i teoreemi eeldused täidetud lõigul $[x, a]$, seega leidub vahemikus $(x, a)$ punkt $c$ nii, et $F'(c) = 0$; kui aga $x > a$, siis on funktsiooni $F(t)$ jaoks Rolle'i teoreemi eeldused täidetud lõigul $[a, x]$, seega leidub vahemikus $(a, x)$ punkt $c$ nii, et $F'(c) = 0$.

Arvestades võrdust $F'(c) = 0$ saame valemist (3.44)

$$-\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-c)^n + \frac{Q(x)}{n!}(x-c)^n = 0\,.$$

Siit tuleneb meid huvitava funktsiooni $Q$ jaoks järgmine valem:

$$Q(x) = f^{(n+1)}(c).$$

Asendame $Q(x)$ selle valemi põhjal avaldistesse (3.39) ja (3.40). Saame

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{(n+1)}\,, \qquad (3.46)$$

$$\begin{aligned} f(x) \;&=\; \underbrace{f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n}_{P_n(x)} + \\ &+ \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}}_{R_n(x)}\,. \qquad (3.47) \end{aligned}$$

Valem (3.47) on funktsiooni $f(x)$ *Taylori valemi* punktis $a$. Taylori valemi peaosa on Taylori polünoom $P_n(x)$. Suurus $R_n(x)$ on *Taylori valemi jääkliige.* Jääkliikmes esinev arv $c$ paikneb $x$ ja $a$ vahel.

Kui $f$ on lõpmata arv kordi diferentseeruv ja $x$ paikneb arvule $a$ piisavalt lähedal, siis $n$ suurenedes Taylori valemi jääkliige läheneb nullile, millest järeldub, et $\lim\limits_{n\to\infty} P_n(x) = f(x)$.

Esitame selle väite tõestuse vaid lihtsal erijuhul. Eeldame, et funktsioon $f$ koos oma kõigi tuletistega on tõkestatud ühe ja sama konstandiga arvu $a$ ümbruses $(a-1, a+1)$, st leidub arv $M$ nii, et iga $x \in (a-1, a+1)$ ja $n \in \mathbb{N}$ korral $|f^{(n)}(x)| \le M$. Peale selle, kui $x \in (a-1, a+1)$, siis $|x-a| < 1$ ja $|(x-a)^n| = |x-a|^n < 1^n = 1$. Järelikult $|f^{(n)}(c)(x-a)^n| \le M$ iga $x \in (a-1, a+1)$ ja $n \in \mathbb{N}$ korral. Seetõttu on suurus $f^{(n)}(c)(x-a)^n$ tõkestatud protsessis

$n \to \infty$. Seevastu on suurus $\frac{1}{(n+1)!}$ lõpmatult väike protsessis $n \to \infty$. Kuna lõpmatult väikese ja tõkestatud suuruse korrutis on lõpmatult väike (vt §2.6), siis

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = \lim_{n\to\infty} f^{(n)}(a)(x-a)^n \frac{1}{n!} = 0$$

iga $x \in (a-1, a+1)$ korral ehk $\lim\limits_{n\to\infty} P_n(x) = f(x)$ iga $x \in (a-1, a+1)$ korral.

Taylori valem langeb $n = 1$ korral kokku funktsiooni muudu valemiga (3.9), mille me tuletasime diferentsiaali käsitlevas paragrahvis §3.3. Veendume selles. Taylori valem $n = 1$ korral on $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + R_1(x)$, kus $R_1(x) = \frac{f''(c)}{2}(x-a)^2$. Asendades siin $\Delta y = f(x) - f(a)$ ja $\Delta x = x - a$ saame võrduse

$$\Delta y = f'(a)\Delta x + R_1(x).$$

Tegemist on funktsiooni muudu valemiga (3.9), mille peaosa on $f(x)$ diferentsiaal kohal $a$, st $f'(a)\Delta x$. Valemi (3.9) jääkliige $\alpha(\Delta x)\Delta x$ langeb kokku Taylori valemi jääkliikmega, st $\alpha(\Delta x)\Delta x = R_1(x) = \frac{f''(c)}{2}\Delta x^2$, kus $c$ on mingi punkt $x$ ja $a$ vahel.

**McLaurini valem**.
Erijuhul $a = 0$ nimetatakse Taylori valemit (polünoomi) ka McLaurini valemiks (polünoomiks). Seega on McLaurini valem järgmine:

$$f(x) = \underbrace{f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n}_{P_n(x)} + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1}}_{R_n(x)},$$

kus $c$ on mingi arv $x$ ja 0 vahel.

Mõned näited McLaurini polünoomide kohta:

$$e^x \approx 1 + x + \tfrac{x^2}{2!} + \tfrac{x^3}{3!} + \ldots + \tfrac{x^i}{n!}$$

$$\sin x \approx x - \tfrac{x^3}{3!} + \tfrac{x^5}{5!} - \tfrac{x^7}{7!} + \ldots + (-1)^{n-1}\tfrac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$$

$$\cos x \approx 1 - \tfrac{x^2}{2!} + \tfrac{x^4}{4!} - \tfrac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^n\tfrac{x^{2n}}{(2n)!}$$

# Peatükk 4

# Tuletise rakendused funktsiooni uurimisel

## 4.1 Funktsiooni kasvamine ja kahanemine.

*Olgu funktsioon $f$ diferentseeruv vahemikus $(a, b)$. Siis kehtivad järgmised väited:*

1. *Kui $f'(x) > 0$ iga $x \in (a, b)$ korral, siis $f$ on kasvav vahemikus $(a, b)$.*
2. *Kui $f'(x) < 0$ iga $x \in (a, b)$ korral, siis $f$ on kahanev vahemikus $(a, b)$.*

*Tõestus*: Tõestame väite 1. Olgu $f'(x) > 0$ iga $x \in (a, b)$ korral. Valime vahemikus $(a, b)$ kaks suvalist punkti $x_1$ ja $x_2$ nii et $x_1 < x_2$. Kui meil õnnestub näidata, et kehtib võrratus $f(x_1) < f(x_2)$, siis on $f$ kasvav vahemikus $(a, b)$ ning väide 1 on tõestatud.

Lagrange'i teoreemi põhjal leidub vahemikus $(x_1, x_2)$ vähemalt üks punkt $c$ nii, et kehtib võrdus

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1). \tag{4.1}$$

Selle võrduse paremal poolel olev tuletis $f'(c)$ on nullist suurem, kuna me eeldasime $f'(x)$ positiivsust vahemikus $(a, b)$. Nullist suurem on ka vahe $x_2 - x_1$, kuna me valisime punktid $x_1$ ja $x_2$ selliselt, et $x_1 < x_2$. Seega on valemi (4.1) parem pool nullist suurem. Saame $f(x_2) - f(x_1) > 0$. Sellest järeldubki soovitud võrratus $f(x_1) < f(x_2)$.

Väide 2 tõestatakse analoogiliselt.

## 4.2 Funktsiooni lokaalsed ekstreemumid.

**Lokaalse ekstreemumi mõiste.**

Öeldakse, et funktsioonil $f$ on punktis $x_1$ *lokaalne maksimum*, kui

1. funktsioon $f$ on määratud punkti $x_1$ mingis ümbruses $(x_1 - \epsilon, x_1 + \epsilon)$;

2. iga $x \in (x_1 - \epsilon, x_1 + \epsilon), x \neq x_1$ korral kehtib võrratus $f(x) < f(x_1)$.

Öeldakse, et funktsioonil $f$ on punktis $x_1$ *lokaalne miinimum*, kui

1. funktsioon $f$ on määratud punkti $x_1$ mingis ümbruses $(x_1 - \epsilon, x_1 + \epsilon)$;

2. iga $x \in (x_1 - \epsilon, x_1 + \epsilon), x \neq x_1$ korral kehtib võrratus $f(x) > f(x_1)$.

Piltlikult väljendudes on lokaalne maksimum funktsiooni graafiku "tipp". Läbides maksimumi vasakult paremale asendub funktsiooni kasvamine kahanemisega. Lokaalne maksimum on funktsiooni graafiku "org". Läbides seda punkti vasakult paremale asendub funktsiooni kahanemine kasvamisega.

Funktsiooni lokaalseid maksimume ja miinimume nimetatakse selle funktsiooni *lokaalseteks ekstreemumiteks.*

Olgu funktsioonil $f$ punktis $x_1$ lokaalne ekstreemum. Sellisel juhul ei saa kehtida võrratus $f'(x_1) > 0$. Tõepoolest, kui kehtiks võrratus $f'(x_1) > 0$, siis §4.1 väite 1 põhjal $f$ kasvaks punkti $x_1$ ümbruses. See ei saa aga nii olla, sest ekstreemumpunktis kasvamine vaheldub kahanemisega. Samal põhjusel ei saa kehtida ka võrratus $f'(x_1) < 0$, sest sellisel juhul §4.1 väite 2 põhjal $f$ kahaneks punkti $x_1$ ümbruses, mis oleks vastuolus sellega, et punktis $x_1$ on ekstreemum. Jäävad üle vaid kaks võimalust: kas 1) $f'(x_1) = 0$ või 2) lõplik tuletis $f'(x_1)$ puudub. Juht 2) tähedab sisuliselt seda, et $f$ ei ole diferentseeruv punktis $x_1$ ning sisaldab kahte alamjuhtu: kas $f'(x_1) = \pm\infty$ või $f'(x_1)$ puudub üldse.

Funktsiooni argumendi väärtusi, mille korral tuletis võrdub nulliga või lõplik tuletis puudub, nimetatakse selle funktsiooni *kriitilisteks punktideks* (täpsemini: *esimest järku kriitilisteks punktideks*).

Tehtud arutluse tulemusena saame formuleerida järgmise väite:

**Lokaalse ekstreemumi tarvilik tingimus**. *Kui funktsioonil $f$ on punktis $x_1$ lokaalne ekstreemum, siis on $x_1$ selle funktsiooni kriitiline punkt.*

Vastupidine väide kehti. Funktsioonil võib olla selliseid kriitilisi punkte, kus ekstreemumeid ei ole. Näiteks funktsioonil $y = x^3$ on kriitiline punkt $x = 0$ (seal $y' = 0$). Samas aga see funktsioon kasvab kogu arvteljel, kaasa arvatud punkti $x = 0$ ümbrus. Seega ei ole funktsioonil $y = x^3$ punktis $x = 0$ lokaalset ekstreemumit.

Tekib loomulik küsimus: millised on piisavad tingimused, mille rahuldamise korral on kriitilises punktis lokaalne ekstreemum? Võib arutleda nii: Lokaalsed ekstreemumid on punktid, kus funktsiooni kasvamine asendub kahanemisega või vastupidi. Seega lokaalses ekstreemumis tuletis vahetab märki. Kui tuletis on positiivne enne ekstreemumit ja negatiivne peale ekstreemumit, siis kasvamine asendub kahanemisega ning vaadeldav punkt on maksimumpunkt. Kui aga tuletis on negatiivne enne ekstreemumit ja positiivne peale ekstreemumit, siis kahanemine asendub kasvamisega ning vaadeldav punkt on miinimimpunkt. Seega võime sõnastada järgmise väite:

**Lokaalse ekstreemumi piisav tingimus I**. *Olgu $x_1$ funktsiooni $f$ kriitiline* *punkt. Kui läbides punkti $x_1$ vasakult paremale funktsiooni tuletise märk muutub plussist miinuseks, siis on funktsioonil selles punktis lokaalne maksimum. Kui aga läbides punkti $x_1$ vasakult paremale funktsiooni tuletise märk muutub miinusest plussiks, siis on funktsioonil selles punktis lokaalne miinimum.*

Kui funktsioonil eksisteerib teist järku tuletis, siis saab lokaalsete ekstreemumite olemasolu kontrollida ka selle abil. Nimelt maksimumpunkti läbides vasakult paremale funktsiooni graafiku puutuja tõus väheneb. See tähendab, et funktsiooni tuletis kahaneb. Funktsiooni tuletis kahaneb aga juhul, kui teine tuletis on negatiivne. Seevastu miinimupunkti läbides puutuja tõus suureneb, seega tuletis kasvab. Tuletis kasvab aga juhul, kui teine tuletis on positiivne. Järelikult kehtib järgmine väide:

**Lokaalse ekstreemumi piisav tingimus II.** *Olgu $f'(x_1) = 0$. Kui $f''(x_1) < 0$, siis on funktsioonil $f$ punktis $x_1$ lokaalne maksimum. Kui aga $f''(x_1) > 0$, siis on funktsioonil $f$ punktis $x_1$ lokaalne miinimum.*

## 4.3 Funktsiooni suurima ja vähima väärtuse leidmine lõigul.

Lõigul $[a, b]$ pidev funktsioon $f$ saavutab sellel lõigul oma suurima ja vähima väärtuse (vt §2.11 omadus 1). Kui suurim (vähim) väärtus saavutatakse vahemiku $(a, b)$ punktis, siis samas punktis omab funktsioon ka lokaalset maksimumi (miinimumi), seega on see punkt ühtlasi funktsiooni kriitiline punkt. Peale selle võib funktsioon saavutada suurima või vähima väärtuse ka lõigu otspunktis $a$ või $b$. Seega tuleb lisaks kriitilistele punktidele kontrollida funktsiooni väärtusi ka lõigu otspunktides.

Kokkuvõttes: funktsiooni $f$ suurima (vähima) väärtuse leidmiseks lõigul $[a, b]$ tuleb

1. leida funktsiooni kriitilised punktid vahemikus $(a, b)$,
2. arvutada $f(a)$ ja $f(b)$,
3. saadud arvudest valida suurim (vähim).

## 4.4 Joone kumerus, nõgusus ja käänupunktid.

**Joone kumerus ja nõgusus.** Vaatleme joont võrrandiga $y = f(x)$ ehk funktsiooni $y = f(x)$ graafikut tasandil $xy$-teljestikus. Eeldame, et funktsioon $f$ on kõikjal diferentseeruv. Viimane on vajalik selleks, et joonel $y = f(x)$ oleks igas punktis puutuja.

Öeldakse, et joon $y = f(x)$ on *nõgus*, kui liikudes vasakult paremale selle joone puutuja tõus suureneb. "Oeldakse, et joon $y = f(x)$ on *kumer*, kui liikudes vasakult paremale selle joone puutuja tõus väheneb.

Kui puutuja tõus suureneb, siis joon muutub järsemaks. Seega nõgus joon kaardub ülespoole. Seevastu puutuja tõusu vähenedes muutub joon laugjamaks. Seega kumer joon kaardub allapoole.

Kuna joone $y = f(x)$ puutuja tõus punktis $(x, f(x))$ võrdub funktsiooni $f$ tuletisega, siis võime väita, et seal, kus $f'$ kasvab, on joon $y = f(x)$ nõgus ja seal, kus $f'$ kahaneb, on joon $y = f(x)$ kumer. Rakendame nüüd §4.1 tõestatud väiteid funktsioonile $f'(x)$. Saame järgmised laused:
1. Kui $f''(x) > 0$ iga $x \in (a, b)$ korral, siis on $f'$ kasvav vahemikus $(a, b)$.
2. Kui $f''(x) < 0$ iga $x \in (a, b)$ korral, siis on $f'$ kahanev vahemikus $(a, b)$.

Nende lausete põhjal saame sõnastada järgmised väited:

1. *Kui* $f''(x) > 0$ *iga* $x \in (a, b)$ *korral, siis on joon* $y = f(x)$ *nõgus vahemikus* $(a, b)$.

2. *Kui* $f''(x) < 0$ *iga* $x \in (a, b)$ *korral, siis on joon* $y = f(x)$ *kumer vahemikus* $(a, b)$.

**Joone käänupunktid.** Punkti, mis eraldab pideva joone kumerat osa nõgusast, nimetatakse selle joone käänupunktiks.

Olgu punkt $P = (x_1, f(x_1))$ joone $y = f(x)$ käänupunkt. Sellisel juhul ei saa kehtida võrratus $f''(x_1) > 0$. Tõepoolest, kui kehtiks $f''(x_1) > 0$, siis ülaltoodud väite 1 põhjal oleks joon $y = f(x)$ nõgus argumendi väärtuse $x_1$ ümbruses. See ei saa aga nii olla, sest vastavalt käänupunkti definitsioonile asendub nõgusus kumerusega, kui argument $x$ läbib käänupunkti $P$ ordinaati $x_1$. Samal põhjusel ei saa kehtida ka võrratus $f''(x_1) < 0$, sest sellisel juhul järelduks ülaltoodud väitest 2, et $y = f(x)$ oleks kumer argumendi $x_1$ ümbruses, mis oleks samuti vastuolus sellega, et $x = x_1$ korral asendub nõgusus kumerusega. Jäävad üle vaid kaks võimalust: kas 1) $f''(x_1) = 0$ või 2) lõplik teist järku tuletis $f''(x_1)$ puudub.

Funktsiooni argumendi väärtusi, mille korral teist järku tuletis võrdub nulliga või lõplik teist järku tuletis puudub, nimetatakse selle funktsiooni *teist järku kriitilisteks punktideks.*

Tehtud arutluse tulemusena saame formuleerida järgmise väite:

**Käänupunkti tarvilik tingimus**. *Kui* $P = (x_1, f(x_1))$ *on joone* $y = f(x)$ *käänupunkt, siis* $x_1$ *on funktsiooni* $f$ *teist järku kriitiline punkt.*

Vastupidine väide kehti. funktsioonil võib olla ka selliseid teist järku kriitilisi punkte, kus käänupunkti ei ole. Näiteks funktsioonil $y = x^4$ on teist järku kriitiline punkt $x = 0$ (seal $y'' = 0$). Samas aga selle funktsiooni esimest järku tuletis $y' = 4x^3$ kasvab kogu arvteljel, kaasa arvatud punkti $x = 0$ ümbrus. Seega on joon $y = x^4$ kõikjal nõgus. Seega ei saa $P = (0, 0)$ olla joone $y = x^4$ käänupunkt. Lihtne on kontrollida, kasutades §4.2 toodud lokaalse ekstreemumi piisavaid tingimusi, et punktis $x = 0$ on sellel funktsioonil hoopis lokaalne miinimum.

Püstitame küsimuse: millistel piisavatel tingimustel on teist järku kriitilises punktis funktsiooni graafikul käänupunkt? Oletame, et $f''(x)$ on suurem nullist punktist $x_1$-st vasakul ja väiksem nullist punktist $x_1$ paremal. Siis ülaltoodud väidete 1 ja 2 põhjal on joon $y = f(x)$ nõgus punktist $x_1$ vasakul ja kumer punktist $x_1$ paremal. Seega $x_1$ korral nõgusus asendub kumerusega, mis tähendab et $P = (x_1, f(x_1))$ on käänupunkt. Analoogiliselt arutleme juhul, kui $f''(x)$ on väiksem nullist punktist $x_1$-st vasakul ja suurem nullist punktist $x_1$ paremal. Siis on joon $y = f(x)$ kumer punktist $x_1$ vasakul ja nõgus punktist $x_1$ paremal. Punktis $P = (x_1, f(x_1))$ asendub kumerus nõgususega, seega on $P = (x_1, f(x_1))$ käänupunkt. Saame järgmise väite:

**Käänupunkti piisav tingimus**. *Olgu $x_1$ funktsiooni $f$ teist järku kriitiline punkt. Kui läbides seda punkti funktsiooni teine tuletis muudab märki, siis on $P = (x_1, f(x_1))$ joone $y = f(x)$ käänupunkt.*

## 4.5 Joone asümptoodid.

**Asümptoodi mõiste.** Vaatleme tasandil $xy$ - teljestikus joont $y = f(x)$. Sirget $l$ nimetatakse joone $y = f(x)$ *asümptoodiks*, kui joone $y = f(x)$ jooksva punkti eemaldumisel lõpmatusse selle punkti kaugus sirgest $l$ läheneb nullile.

Punkt eemaldub lõpmatusse, kui selle punkti kaugus koordinaatide alguspunktist kasvab piiramatult.

Joonel $y = f(x)$ võib olla kahte liiki asümptoote:

1. *Vertikaalasümptoodid.* Need on $y$-teljega paralleelsed sirged. Asümptoodi võrrand on $x = a$. Sirge $x = a$ on joone $y = f(x)$ asümptoodiks siis ja ainult siis, kui kehtib vähemalt üks järgmistest piirväärtustest:

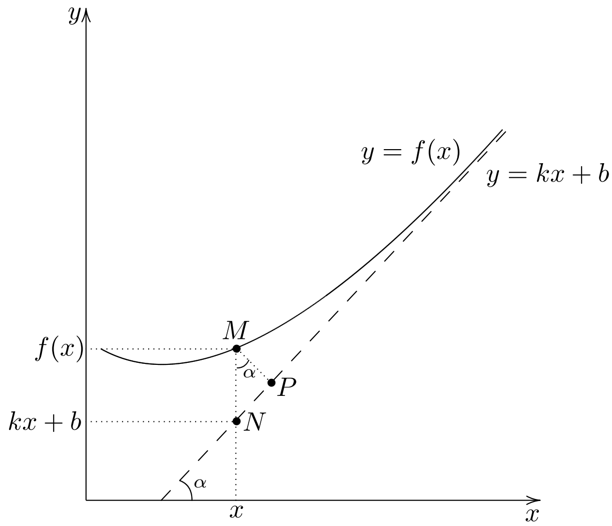
$$\lim_{x\to a^-} f(x) = -\infty\,, \quad \lim_{x\to a^-} f(x) = \infty\,,$$
$$\lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty \quad \text{või} \quad \lim_{x\to a^+} f(x) = \infty\,.$$

2. *Kaldasümptoodid.* Need on sirged, mis ei ole paralleelsed $y$-teljega. Asümptoodi võrrand on $y = kx+b$, kus $k$ on asümptoodi tõus. Kaldasümptoodi erijuht on *horisontaalasümptoot*, mis on paralleelne $x$-teljega. Tõus $k$ on sellisel juhul võrdne nulliga, st asümptoodi võrrand on $y = b$.

   Tuletame valemid kaldasümptoodi võrrandis $y = kx + b$ esinevate kordajate $k$ ja $b$ jaoks. Vaatleme konkreetselt juhtu, kui sirge $y = kx + b$ on joone $y = f(x)$ asümptoodiks protsessis $x \to \infty$. Selline olukord on kujutatud joonisel 4.1.

   Kui $x \to \infty$, siis eemaldub punkt $M = (x, f(x))$ lõpmatusse mööda joont $y = f(x)$. Kuna $y = kx + b$ on joone $y = f(x)$ asümptoot, siis punkti $M$ kaugus sirgest $y = kx + b$ läheneb nullile. Tähistame punkti $M$ ristprojektsiooni sirgel $y = kx + b$ tähega $P$. Kuna punkti $M$ kaugus sirgest $y = kx + b$ võrdub lõigu $MP$ pikkusega $|MP|$, saame

$$\lim_{x\to\infty} |MP| = 0\,. \tag{4.2}$$




Joonis 4.1

Ühtlasi näeme jooniselt, et $|MN| = \frac{|MP|}{\cos\alpha}$, kus $\alpha$ on asümptoodi tõusunurk. Kuna $\alpha$ jääb muutumatuks protsessis $x \to \infty$, siis (4.2) põhjal

$$\lim_{x\to\infty} |MN| = \lim_{x\to\infty} \frac{|MP|}{\cos\alpha} = \frac{1}{\cos\alpha} \lim_{x\to\infty} |MP| = 0\,. \tag{4.3}$$

Edasi paneme tähele, et $|MN|$ võrdub funktsioonide $f(x)$ ja $kx+b$ väärtuste vahega, st

$$|MN| = f(x) - kx - b.$$

Seega võrduse (4.3) põhjal

$$\lim_{x\to\infty} [f(x) - kx - b] = 0\,. \tag{4.4}$$

Tuues $x$ sulgude ette saame

$$\lim_{x\to\infty} x \cdot \left[\frac{f(x)}{x} - k - \frac{b}{x}\right] = 0\,.$$

Selles valemis oleva korrutise $x \cdot \left[\frac{f(x)}{x} - k - \frac{b}{x}\right]$ esimene tegur $x$ läheneb lõpmatusele, kuid korrutis ise läheneb nullile. Järelikult peab teine tegur lähenema nullile, st

$$\lim_{x\to\infty} \left[\frac{f(x)}{x} - k - \frac{b}{x}\right] = 0\,.$$

Selles avaldises $\frac{b}{x} \to 0$, kui $x \to \infty$. Seega

$$\lim_{x\to\infty}\left[\frac{f(x)}{x} - k\right] = 0 \quad \text{ehk} \quad \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} - k = 0$$

ehk

$$k = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}\,. \tag{4.5}$$

Võrdusest (4.4) saame veel

$$b = \lim_{x\to\infty}\left[f(x) - kx\right]. \tag{4.6}$$

Kokkuvõttes oleme tõestanud järgmise väite:

*Kui $y = kx + b$ on joone $y = f(x)$ asümptoot protsessis $x \to \infty$, siis $k$ ja $b$ avalduvad valemitega* (4.5) *ja* (4.6).

Analoogiline väide kehtib ka piirprotsessi $x \to -\infty$ korral:

*Kui $y = kx + b$ on joone $y = f(x)$ asümptoot protsessis $x \to -\infty$, siis*

$$k = \lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} \quad \textit{ja} \quad b = \lim_{x\to-\infty}\left[f(x) - kx\right].$$

## 4.6 Funktsiooni uurimise ja graafiku konstrueerimise üldine plaan.

Funktsiooni uurimine tähendab leida selle funktsiooni

1. määramispiirkond,
2. funktsiooni kasvamis- ja kahanemisvahemikud ning lokaalsed ekstreemumid,
3. funktsiooni graafiku nõgusus- ja kumerusvahemikud ning käänupunktid,
4. graafiku asümptoodid.

Uurimisel saadud informatsiooni põhjal on võimalik skitseerida funktsiooni ligikaudne graafik. Graafiku joonestamiseks on sageli otstarbekas arvutada veel funktsiooni väärtusi erinevates punktides.

Kui uuritav funktsioon on paarisfunktsioon või paaritu funktsioon, siis piisab, kui uurida seda funktsiooni vaid positiivsete argumendi väärtuste korral ja skitseerida graafik poolteljel $x > 0$. Graafiku saame jätkata poolteljele $x < 0$ peegeldamise teel.

# Peatükk 5

# Integraalid

## 5.1 Algfunktsioon ja määramata integraal.

**Algfunktsiooni mõiste.** Funktsiooni $F$ nimetatakse funktsiooni $f$ *algfunktsiooniks* hulgas $D$, kui iga $x \in D$ korral kehtib võrdus $F'(x) = f(x)$.

Paneme tähele seaduspärasust: Kui $F$ on $f$ algfunktsioon, siis suvaline teine funktsioon kujul $F + C$, kus $C$ on konstant, on samuti $f$ algfunktsioon. Tõepoolest, kui $F'(x) = f(x)$, siis

$$[F(x) + C]' = F'(x) + C' = F'(x) = f(x).$$

Teisest küljest, kui $F$ ja $G$ on $f$ algfunktsioonid, siis saavad nad teineteisest erineda vaid liidetava konstandi võrra. Kontrollime ka seda väidet. Kui $F'(x) = f(x)$ ja $G'(x) = f(x)$, siis

$$(F - G)'(x) = F'(x) - G'(x) = f(x) - f(x) = 0.$$

Nulltuletist omab aga ainult konstantne funktsioon. Seega $F - G = C$, kus $C$ on konstant. Seda oligi vaja näidata. Nende arutluste tulemusena saame väita, et kui $F$ on $f$ algfunktsioon, siis kõik $f$ algfunktsioonid avalduvad kujul $F + C$, kus $C$ on konstant.

**Määramata integraali mõiste.** Funktsiooni $f$ algfunktsioonide üldavaldist $F(x) + C$, kus $C$ on konstant, nimetatakse funktsiooni $f$ *määramata integraaliks* ja tähistatakse $\int f(x)dx$. Seega definitsiooni kohaselt

$$\int f(x)dx = F(x) + C, \quad C - \text{konstant}. \tag{5.1}$$

Funktsiooni $f$ algfunktsiooni leidmist nimetatakse integreerimiseks.

Avaldisest (5.1) nähtub, et määramata integraal ei ole ühene funktsioon. Iga $x$ korral on tal lõpmata palju erinevaid väärtusi, mis sõltuvad valitud konstandist $C$. Teisest küljest võib määramata integraali tõlgendada kui üheste funktsioonide parve $y = F(x) + C$, kus konstandi $C$ igale väärtusele vastab üks ühene funktsioon. Kujutades seda funktsioonideparve graafiliselt tasandil $xy$-koordinaadistikus saame joonteparve, mille jooned on üksteisest tuletatavad $y$-telje sihilise paralleellükke abil.

## 5.2 Integraalide tabel. Määramata integraali omadused.

**Integraalide tabel.**

1. $\int dx \;=\; x + C$

   kuna $(x + C)' = 1$.

2. $\int x^a dx \;=\; \frac{x^{a+1}}{a+1} + C$, kus $a \neq -1$,

   kuna $\left(\frac{x^{a+1}}{a+1} + C\right)' = (a+1)\frac{x^a}{a+1} = x^a$.

3. $\int \frac{dx}{x} \;=\; \ln|x| + C$.

Tõestame valemi 3. Selleks peame näitama et $(\ln|x| + C)' = \frac{1}{x}$.

Kui $x > 0$ siis $(\ln|x| + C)' = (\ln x + C)' = \frac{1}{x}$.
Kui $x < 0$ siis $(\ln|x| + C)' = [\ln(-x) + C]' = (-1)\frac{1}{-x} = \frac{1}{x}$.

Kui $x = 0$ siis ei ole $\ln|x|$ määratud. Oleme tõestanud valemi 3 kehtivuse kõikide $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ korral.

4. $\int a^x dx \;=\; \frac{a^x}{\ln a} + C$ , kus $a > 0, a \neq 1$,

   kuna $\left(\frac{a^x}{\ln a} + C\right)' = \frac{a^x}{\ln a}\ln a = a^x$.

   Erijuht: $\int e^x dx \;=\; e^x + C$.

5. $\int \sin x dx \;=\; -\cos x + C$.

6. $\int \cos x dx \;=\; \sin x + C$.

7. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} \;=\; \tan x + C$.

8. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} \;=\; -\cot x + C$.

9. $\int \frac{dx}{k^2+x^2} \;=\; \frac{1}{k}\arctan\frac{x}{k} + C$.

   Erijuht: $\int \frac{dx}{1+x^2} \;=\; \arctan x + C$.

10. $\int \frac{dx}{\sqrt{k^2-x^2}} \;=\; \arcsin\frac{x}{k} + C$.

    Erijuht: $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \;=\; \arcsin x + C$.

**Hüperboolsete trigonomeetriliste funktsioonidega seotud integraalid.**

11. $\int \sinh x\, dx \;=\; \cosh x + C$

12. $\int \cosh x\, dx \;=\; \sinh x + C$

13. $\int \frac{dx}{\cosh^2 x} \;=\; \tanh x + C$

14. $\int \frac{dx}{\sinh^2 x} \;=\; -\coth x + C$

15. $\int \frac{dx}{k^2-x^2} \;=\; \frac{1}{2k}\ln\left|\frac{k+x}{k-x}\right| + C \;=\; \begin{cases} \frac{1}{k}\mathrm{artanh}\,\frac{x}{k} + C & \text{kui } |x| < k \\ \frac{1}{k}\mathrm{arcoth}\,\frac{x}{k} + C & \text{kui } |x| > k \end{cases} \quad (k > 0)$

16. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+k^2}} \;=\; \ln\left(x + \sqrt{x^2+k^2}\right) + C \;=\; \mathrm{arsinh}\,\frac{x}{k} + C$

17. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-k^2}} \;=\; \ln\left|x + \sqrt{x^2-k^2}\right| + C \;=\; \begin{cases} \mathrm{arcosh}\,\frac{x}{k} + C & \text{kui } x > k \\ -\mathrm{arcosh}\,\left(-\frac{x}{k}\right) + C & \text{kui } x < -k \end{cases} \quad (k > 0)$

Valemite 4 - 17 kontrollimiseks piisab kui arvutada nende paremate poolte tuletised kasutades põhiliste elementaarfunktsioonide tuletiste tabelit §3.1 ja liitfunktsiooni tuletise arvutamise eeskirja §3.4 ning võrrelda saadud tulemusi integraalialuste funktsioonidega.

**Määramata integraali omadused.**

1. $\int [f(x) + g(x)]dx \;=\; \int f(x)dx + \int g(x)dx.$

2. $\int a\, f(x)dx \;=\; a\int f(x)dx$, kus $a$ on konstant.

3. Kui $\int f(x)dx \;=\; F(x) + C$ ja $a$, $b$ on konstandid siis

$$\int f(ax+b)dx \;=\; \frac{1}{a}F(ax+b) + C.$$

Tõestame omaduse 3. Selleks me peame näitama, et $\left[\frac{1}{a}F(ax+b) + C\right]' = f(ax+b)$. Kasutades liitfunktsiooni diferentseerimise eeskirja ja võrdust $F'(x) = f(x)$ saame seose

$$\left[\frac{1}{a}F(ax+b) + C\right]' \;=\; \frac{1}{a}[F(ax+b)]' \;=\; \frac{1}{a}aF'(ax+b) \;=\; f(ax+b),$$

mida oligi tarvis tõestada.

## 5.3 Asendusvõte ja ositi integreerimine määramata integraali avaldamisel.

**Asendusvõte.** Vaatleme määramata integraali

$$\int f(x)dx\,. \tag{5.2}$$

Integraali (5.2) avaldamisel asendusvõttega tehakse selle integraali all muutuja vahetus. Selleks valitakse mingi funktsioon $u = \varphi(x)$ ja integreerimine muutuja $x$ järgi asendatakse integreerimisega muutuja $u$ järgi. Eeldame, et $\varphi$ on üksühene ja diferentseeruv. Tähistame funktsiooni $\varphi$ pöördfunktsiooni $\psi$-ga. Seega

$$x = \psi(u)\,. \tag{5.3}$$

Paneme kirja funktsiooni $\psi$ tuletise diferentsiaalide jagatisena: $\frac{dx}{du} = \psi'(u)$. Korrutades seda võrdust $du$-ga saame

$$dx = \psi'(u)du\,. \tag{5.4}$$

Kasutades valemeid (5.3) ja (5.4) asendame $x$ ja $dx$ integraali (5.2) all. Saame avaldise

$$\int f(x)dx = \int f[\psi(u)]\psi'(u)du\,. \tag{5.5}$$

Üldiselt kasutatakse asendusvõtet kahel erineval juhul. Esimene juht on selline, kui valemi (5.5) vasakul pool olev integraal $\int f(x)dx$ ei ole otseselt avaldatav. Siis valitakse uus muutuja $u = \varphi(x)$ ja teostatakse ülalkirjeldatud asendus. Muutuja vahetus omab mõtet, kui tulemusena saadud integraal võrduse (5.5) paremal pool on lihtsamini arvutatav kui vasakpoolne integraal. Teisel juhul kasutatakse asendusvõtet siis, kui avaldatava integraali algkuju on selline nagu (5.5) paremal pool, kuid ta ei ole lihtsalt avaldatav. See-eest aga vasakpoolne integraal $\int f(x)dx$ avaldub lihtsalt. Siis teostatatakse ülalkirjeldatud asendusprotseduur vastupidises järjekorras.

**Ositi integreerimine**. Olgu $u = u(x)$ ja $v = v(x)$ kaks diferentseeruvat funktsiooni. Paneme kirja nende korrutise diferentsiaali avaldise (vt. diferentsiaali omadus 3 §3.4):

$$d(uv) = vdu + udv\,.$$

Integreerime seda avaldist. Saame

$$\int d(uv) = \int vdu + \int udv\,.$$

Kuna $\int d(uv) = uv + C$ integraalide tabeli valemi 1 põhjal, siis

$$uv + C = \int vdu + \int udv\,.$$

Konstandi $C$ võib sellest valemist välja jätta, sest mõlemad määramata integraalid $\int udv$ ja $\int vdu$ sisaldavad juba määramata konstante. Viies $\int vdu$ võrduse teisele poolele saame

$$\int udv = uv - \int vdu\,. \tag{5.6}$$

Saadud avaldis kannab ositi integreerimise valemi nime.

## 5.4 Ratsionaalfunktsioonide integreerimine. Ratsionaalfunktsiooni integraalile taanduvad integraalid.

**Ratsionaalfunktsiooni integreerimine.** Olgu antud ratsionaalfunktsiooni integraal $\int R(x)dx$. Teatavasti on ratsionaalfunktsioon kahe polünoomi jagatis. Seega $R(x) = \frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$, kus $P_m$ on $m$-astme polünoom ja $Q_n$ on $n$-astme polünoom. Vaadeldava integraali arvutamine koosneb alljärgnevatest etappidest.

1. *Polünoomide $P_m$ ja $Q_n$ jagamine.* See etapp teostatakse ainult siis, kui $m \geq n$. Eesmärgiks on eraldada välja ratsionaalfunktsiooni täisosa polünoomi kujul ja jääki sisaldav murdosa. Täpsemalt: funktsioon $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ esitatakse järgmisel kujul:

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = T_{m-n}(x) + \frac{S_t(x)}{Q_n(x)}, \tag{5.7}$$

kus $T_{n-m}(x)$ on $m-n$-astme polünoom ja $S_t(x)$ on $t$-astme polünoom, kusjuures kehtib võrratus $t < n$. Polünoomid $T_{m-n}(x)$ ja $S_t(x)$ on vastavalt jagatise täisosa ja jääk. Täisosa $T_{m-n}(x)$ integreerimine on lithne, sest polünoom $T_{m-n}(x)$ on astmefunktsioonide summa, millele saab rakendada tabeli valemeid 1 ja 2. Seega koondub meie põhitähelepanu edaspidi ratsionaalfunktsiooni

$$\frac{S_t(x)}{Q_n(x)}, \quad \text{kus } t < n, \tag{5.8}$$

integraali arvutamisele. Kui $m < n$, siis jääb jagamise etapp vahele, sest integreeritava funktsiooni lugeja on juba algselt väiksema astmega kui nimetaja, st funktsioon on kujul (5.8).

2. *Ratsionaalfunktsiooni (5.8) lahutamine osamurdude summaks.* Alustame murru nimetaja teguriteks lahutamisest. Nimelt on võimalik tõestada, et suvalise polünoomi $Q_n(x)$ saab lahutada teguriteks järgmisel kujul:

$$Q_n(x) = c \cdot (x-a)^k \cdot \ldots \cdot (x^2+px+q)^l \cdot \ldots, \tag{5.9}$$

milles esineb teatud lõplik arv tegureid kujul $(x-a)^k$ erinevate konstantidega $a \in \mathbb{R}$ ja astmetega $k \in \mathbb{N}$ ning teatud lõplik arv tegureid kujul $(x^2+px+q)^l$ erinevate konstantidega $p, q \in \mathbb{R}$ ja astmetega $l \in \mathbb{N}$ ning $c$ on konstant. Seejuures ruutfunktsioonide $x^2+px+q$ diskriminandid on negatiivsed, st $p^2-4q < 0$. Seetõttu ei saa tegureid $(x^2+px+q)^l$ reaalarvude hulgas enam väiksemateks teguriteks lahutada. Saame

$$\frac{S_t(x)}{Q_n(x)} = \frac{S_t(x)}{c\,(x-a)^k \cdot \ldots \cdot (x^2+px+q)^l \cdot \ldots}.$$

Edasi lahutame funktsiooni $\frac{S_t(x)}{Q_n(x)}$ osamurdude summaks järgmiselt:

$$\frac{S_t(x)}{Q_n(x)} = \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \ldots + \frac{A_k}{(x-a)^k} + \ldots + \tag{5.10}$$
$$+\frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q} + \frac{M_2x+N_2}{(x^2+px+q)^2} + \frac{M_lx+N_l}{(x^2+px+q)^l} + \ldots,$$

kus $A_1, \ldots, A_k, \ldots, M_1, N_1, \ldots, M_l, N_l, \ldots$ on teatud reaalarvulised konstandid, mis tuleb eraldi määrata (sellest pisut hiljem). Märgime, et toodud valemis vastab igale polünoomi $Q_n(x)$ tegurile $(x-a)^k$ grupp liidetavaid kujul $\frac{A_i}{(x-a)^i}$, kus $i = 1, \ldots, k$, ja igale polünoomi $Q_n(x)$ tegurile $(x^2+px+q)^l$ grupp liidetavaid kujul $\frac{M_ix+N_i}{(x^2+px+q)^i}$, kus $i = 1, \ldots, l$. Konstantide $A_1, \ldots, A_k, \ldots, M_1, N_1, \ldots, M_l, N_l, \ldots$ määramiseks minnakse valemi (5.10) paremal poolel ühisele nimetajale. Kuna vastav ühine nimetaja on $Q_n(x)$, peab paremal poolel saadav lugeja olema võrdne vasaku poole lugejaga $S_t(x)$. Sellest võrdusest tuletataksegi võrrandid tundmatute $A_1, \ldots, A_k, \ldots, M_1, N_1, \ldots, M_l, N_l, \ldots$ määramiseks. Funktsiooni (5.8) integreerimine seisneb nüüd valemis (5.10) esinevate osamurdude integreerimises.

3. *Osamurdude integreerimine.* Murru $\frac{A}{(x-a)^i}$ integreerimine on lihtne. Tabeli valemite 2 ja 3 ning määramata integraali omaduste 2 ja 3 põhjal

$$\int \frac{A}{(x-a)^i}dx = \begin{cases} \frac{A}{(1-i)(x-a)^{i-1}} + C & \text{kui } i \neq 1, \\ A\ln|x-a| + C & \text{kui } i = 1. \end{cases}$$

Murru $\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^i}$ integreerimine on natuke keerulisem. Murd $\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^i}$ lahutatakse kahe murru summaks, millest esimese lugejas on konstandiga korrutatud funktsiooni $x^2+px+q$ tuletis ja teise lugeja on konstantne:

$$\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^i} = \frac{c_1(2x+p)}{(x^2+px+q)^i} + \frac{c_2}{(x^2+px+q)^i}. \tag{5.11}$$

On lihtne näha (minnes selle valemi paremal poolel ühisele nimetajale ja võrdsustades lugejates olevad $x$ kordajad ning vabaliikmed), et $2c_1 = M$, $c_1p+c_2 = N$, millest tulenevad järgmised valemid konstantide $c_1$ ja $c_2$ jaoks: $c_1 = \frac{M}{2}$, $c_2 = N - \frac{Mp}{2}$. Avaldisest (5.11) saame

$$\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^i}dx = c_1 \int \frac{(2x+p)dx}{(x^2+px+q)^i} + c_2 \int \frac{dx}{(x^2+px+q)^i}. \tag{5.12}$$

Valemi (5.12) paremal poolel oleva esimese integraali avaldamisel kasutatakse asendust $u = x^2+px+q$. Siis $du = (2x+p)dx$ ja

$$\int \frac{(2x+p)dx}{(x^2+px+q)^i} =$$
$$= \int \frac{du}{u^i} = \begin{cases} \frac{1}{(1-i)u^{i-1}} + C = \frac{1}{(1-i)(x^2+px+q)^{i-1}} + C & \text{kui } i \neq 1 \\ \ln|u| + C = \ln|x^2+px+q| + C & \text{kui } i = 1. \end{cases}$$

Jääb veel avaldada valemi (5.12) paremal poolel olev teine integraal

$$I_i = \int \frac{dx}{(x^2 + px + q)^i}.$$

Eraldame kõigepealt tema nimetajas olevast ruutfunktsioonist täisruudu:

$$x^2 + px + q = x^2 + 2\,\tfrac{p}{2}x + q = \left(x^2 + 2\,\tfrac{p}{2}x + \tfrac{p^2}{4}\right) + q - \tfrac{p^2}{4} =$$
$$= \left(x + \tfrac{p}{2}\right)^2 + q - \tfrac{p^2}{4} = (x+a)^2 + k^2\,,$$

kus $a = \frac{p}{2}$ ja $k^2 = q - \frac{p^2}{4}$. Märgime, et $q - \frac{p^2}{4} > 0$, kuna ruutfunktsioonide $x^2 + px + q$ diskriminandid on negatiivsed, st $p^2 - 4q < 0$. Kui $i = 1$, siis saab integraali $I_1$ avaldamisel kasutada tabeli valemit 9 ja määramata integraali omadust 3:

$$I_1 = \int \frac{dx}{x^2 + px + q} = \int \frac{dx}{k^2 + (x+a)^2} = \frac{1}{k}\arctan\frac{x+a}{k} + C.$$

Kui $i > 1$, siis saab integraali $I_i$ avaldada kasutades järgmisest rekurrentset valemit:

$$I_i = \frac{x+a}{(2i-2)k^2(x^2+px+q)^{i-1}} + \frac{2i-3}{(2i-2)k^2} I_{i-1}\,. \qquad (5.13)$$

Integraali $I_1$ kaudu avaldub sellest valemist $I_2$, $I_2$ kaudu $I_3$ jne.

**Ratsionaalfunktsiooni integraalile taanduvad integraalid.**
Siinkohal vaatleme mitmesuguseid integraale kujul $\int R(f_1(x), \dots, f_n(x))dx$. Liitfunktsiooni $R(f_1(x), \dots, f_n(x))$ all mõistame funktsiooni, milles on ratsionaalfunktsiooni $R(x)$ argument $x$ asendatud kõikjal ühega funktsioonidest $f_1(x), \dots, f_n(x)$. Näiteks, kui $R(x) = \frac{1}{1+x^2}$ ja $f_1(x) = \sin x$, $f_2(x) = \cos x$, siis on liitfunktsiooni $R(\sin x, \cos x)$ moodustamiseks järgmised võimalused:

$$R(\sin x, \cos x) = \tfrac{1}{1+\sin^2 x},\ R(\sin x, \cos x) = \tfrac{1}{1+\cos^2 x},$$
$$R(\sin x, \cos x) = \tfrac{1}{1+\sin x \cos x}.$$

Teatud juhtudel on võimalik integraali $\int R(f_1(x), \dots, f_n(x))dx$ sobiva asendusega $u = \varphi(x)$ taandada ratsionaalfunktsiooni integraalile, st integraalile kujul $\int R_1(u)du$, kus $R_1(u)$ on ratsionaalfunktsioon argumendiga $u$. Viimase avaldamiseks saab kasutada ülaltoodud eeskirja. Alljärgnevas loetelus on toodud mõned taolised integraalid koos asendustega, mis viivad nad ratsionaalfunktsioonide inegraalidele.

$$\int R\left(e^x\right)dx\,, \quad u = e^x$$

$$\int R\left(\sin^2 x, \cos x\right)\sin x dx\,, \quad u = \cos x$$

$$\int R\left(\sin x, \cos^2 x\right)\cos x dx\,, \quad u = \sin x$$

$$\int R(\sin x, \cos x)\,dx\,, \quad u = \tan\frac{x}{2}, \quad \text{asendusvalemid:} \quad \begin{array}{l} \sin x = \frac{2u}{1+u^2} \\ \cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2} \\ dx = \frac{2du}{1+u^2} \end{array}$$

$$\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}\right) dx\,, \quad u = \sqrt[n]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}$$

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right) dx\,, \quad u = \begin{cases} \sqrt{ax^2+bx+c} + \sqrt{a}x & \text{kui } a > 0 \\ \frac{\sqrt{ax^2+bx+c}}{x-x_1} & \text{kui } a < 0\,, \end{cases}$$

$$\text{kus } x_1 \text{ on võrrandi } ax^2+bx-c=0 \text{ lahend}$$

## 5.5 Integraalsumma ja määratud integraal.

**Integraalsumma mõiste.** Olgu antud funktsioon $f$, mis on *pidev* lõigul $[a,b]$. Jaotame lõigu $[a,b]$ $n$ osalõiguks punktidega $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$, kusjuures $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$. Tähistame järjekorras $i$-nda osalõigu pikkuse sümboliga $\Delta x_i$, st

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}.$$

Valime igal osalõigul $[x_{i-1}, x_i]$ ühe punkti $p_i$. Moodustame summa

$$S_n = f(p_1)\Delta x_1 + f(p_2)\Delta x_2 + \ldots + f(p_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(p_i)\Delta x_i\,. \tag{5.14}$$

Seda summat nimetatakse funktsiooni $f$ *integraalsummaks* lõigul $[a,b]$.

**Määratud integraali mõiste.** Tähistame pikima osalõigu pikkuse sümboliga $\varrho_n$, st $\varrho_n = \max\{\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n\}$. Muudame lõigu $[a,b]$ tükeldust järjest peenemaks selliselt, et pikima osalõigu pikkus $\varrho_n$ läheneb nullile. Kui $f$ on pidev lõigul $[a,b]$, siis on integraalsummal $S_n$ taolises piirprotsessis lõplik piirväärtus. Seda piirväärtust nimetatakse funktsiooni $f$ *määratud integraaliks* lõigul $[a,b]$ ja tähistatakse

$$\int_a^b f(x)dx\,.$$

Seega definitsiooni kohaselt

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varrho_n \to 0} S_n\,. \tag{5.15}$$

Integraali $\int_a^b f(x)dx$ komponendid kannavad järgmisi nimetusi: $a$ - integraali alumine raja, $b$ - integraali ülemine raja, $[a,b]$ - integreerimislõik, $x$ - integreerimismuutuja, $f$ - integreeritav funktsioon, $f(x)dx$ - integraalialune avaldis.

**Näide füüsikast.** Liikugu materiaalne keha $x$-teljel punktist $a$ punkti $b$. Mõjugu sellele kehale jõud $F$, mis üldiselt sõltub keha asukohast, st $F = F(x)$. Eesmärgiks on leida valem töö $A$ arvutamiseks, mille jõud $F$ teeb keha nihutamisel punktist $a$ punkti $b$.

Kui $F$ on konstantne, siis avaldub töö valemiga $A = F(b - a)$. Kui $F$ ei ole konstantne, siis tuleb töö arvutamisel kasutada integreerimist. Idee on järgmine: jaotame vaadeldava lõigu $[a, b]$ väikesteks osalõikudeks nii, et igal osalõigul on jõud ligikaudselt konstantne. Igal osalõigul arvutame töö eraldi kasutades selleks ülaltoodud valemit. Seejärel liidame osalõikudel tehtud tööd kokku saades töö tervel lõigul $[a, b]$. Niiviisi saame ligikaudse töö valemi. Täpse töö valemi saame, kui muudame lõigu tükelduse "lõpmata peeneks", st võtame ligikaudsest töö valemist piirväärtuse pikima osalõigu pikkuse lähenemisel nullile.

Asume töö valemi tuletamise juurde. Seejuures eeldame, et funktsioon $F(x)$ on pidev. Pidevus on vajalik selleks, et $F(x)$ muutuks väikestel osalõikudel vähe. Teatavasti läheneb pideva funktsiooni muut nullile tema argumendi muudu lähenemisel nullile (vt §2.9).

Jaotame lõigu $[a, b]$ $n$ osalõiguks punktidega $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$, kusjuures $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$. Tähistame järjekorras $i$-nda osalõigu pikkuse sümboliga $\Delta x_i$, st $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Valime igal osalõigul $[x_{i-1}, x_i]$ ühe punkti $p_i$. Kui $i$-nda osalõigu pikkus on väike, siis muutub pidev funktsioon $F(x)$ sellel osalõigul vähe, st $F(x) \approx F(p_i)$ iga $x \in [x_{i-1}, x_i]$ korral. Seega on $i$-ndal osalõigul tehtud töö $A_i$ ligikaudselt võrdne $F(p_i)$ ja osalõigu pikkuse $\Delta x_i$ korrutisega, st $A_i \approx F(p_i)\Delta x_i$. Summeerides tööd üle osalõikude saame töö ligikaudse avaldise kogu lõigul $[a, b]$:

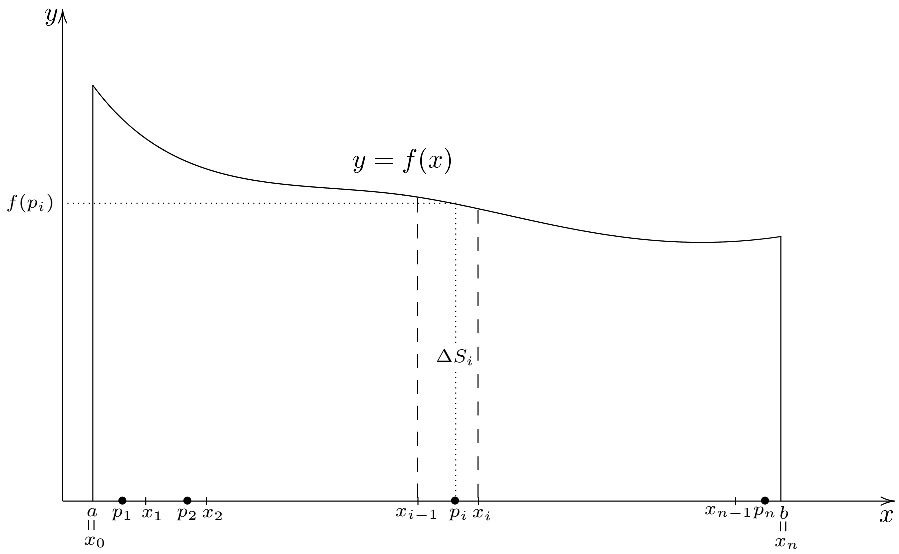
$$A = \sum_{i=1}^{n} A_i \approx \sum_{i=1}^{n} F(p_i)\Delta x_i. \tag{5.16}$$

Mida väiksem on osalõigu $[x_{i-1}, x_i]$ pikkus, seda vähem muutub jõud sellel osalõigul ja seda täpsem on valem $A_i \approx F(p_i)\Delta x_i$. Olgu $\varrho_n$ pikima osalõigu pikkus. Mida väiksem on $\varrho_n$, seda väiksemad on osalõikude pikkused ning järelikult on seda täpsem valem (5.16). Teisest küljest, valemi (5.16) paremal poolel seisab funktsiooni $F$ integraalsumma lõigul $[a, b]$. Integraalsumma läheneb määratud integraalile protsessis $\varrho_n \to 0$. Seega saame ligikaudsest valemist (5.16) piirprotsessis $\varrho_n \to 0$ järgmise täpse valemi töö jaoks:

$$A = \int_a^b F(x)dx\,.$$

## 5.6 Määratud integraali geomeetriline sisu.

Olgu funktsioon $f$ pidev lõigul $[a, b]$. Eeldame, et $f(x) \geq 0$. Vaatleme joontega $y = f(x)$, $x = a$, $x = b$ ja $y = 0$ piiratud kõvertrapetsit (joonisel 5.1 on see ümbritsetud pideva joonega).




Joonis 5.1

Tähistame selle kujundi pindala sümboliga $S$. Meie eesmärk on tuletada valem pindala $S$ jaoks. Selleks jaotame lõigu $[a, b]$ $n$ osalõiguks punktidega $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$, kusjuures $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$. Fikseerime igal osalõigul $[x_{i-1}, x_i]$ ühe punkti $p_i$. Tähistame

$$\Delta x_i \;=\; x_i - x_{i-1}\,.$$

Vaatleme osalõigule $[x_{i-1}, x_i]$ toetuvat kõvertrapetsi osa $\Delta S_i$ (joonisel 5.1 on selle küljed tõmmatud katkendliku joonega). Kui $\Delta x_i$ on väike, siis muutub pidev funktsioon $f$ osalõigul $[x_{i-1}, x_i]$ vähe. Seega võib ta sellel osalõigul lugeda ligikaudselt võrdseks konstandiga $f(p_i)$ ehk

$$f(x) \approx f(p_i) \quad \text{kui} \quad x \in [x_{i-1}, x_i]\,. \tag{5.17}$$

Järelikult on $\Delta S_i$ ligikaudselt ristkülik ja tema pindala avaldub ligikaudu kõrguse ja aluse korrutisena:

$$\Delta S_i \approx f(p_i)\Delta x_i\,.$$

Terve kõvertrapetsi ligikaudse pindala valemi saame, kui summeerime osapiirkondade pindalad:

$$S \;\approx\; \sum_{i=1}^{n} f(p_i)\Delta x_i\,. \tag{5.18}$$

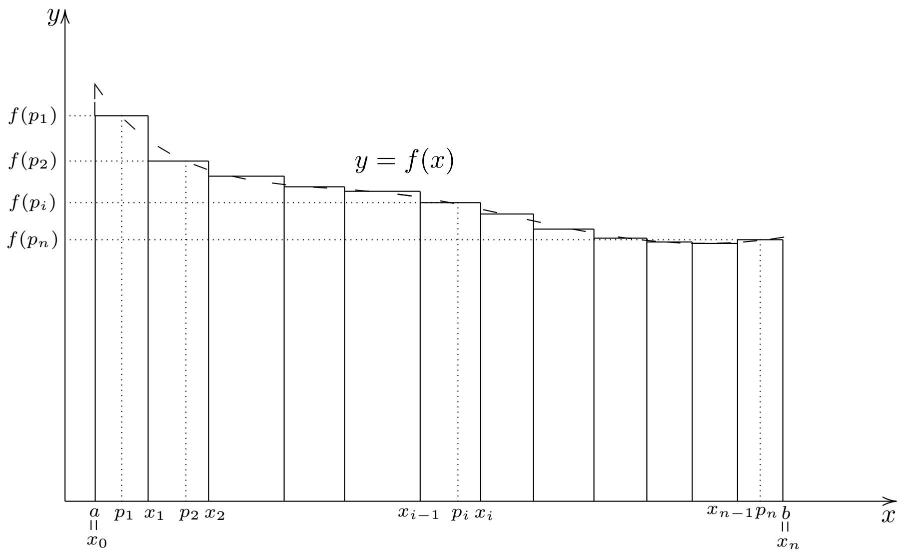
Märgime, et saadud valemi paremal poolel seisab aluseid $\Delta x_i$ ja kõrgusi $f(p_i)$ omavate ristkülikute ühendi (vt joonis 5.2) pindala.

Mida väiksem on $\Delta x_i$, seda vähem muutub funktsioon $f$ osalõigu $[x_{i-1}, x_i]$ peal, järelikult seda täpsem on valem (5.17). Seega, mida peenem on $[a, b]$ tükeldus, seda täpsem on ka pindala valem (5.18). Teisest küljest, valemi (5.18) paremal poolel on funktsiooni $f$ integraalsumma lõigul $[a, b]$. Järelikult, kui pikima osalõigu pikkus $\varrho_n$ läheneb nullile, siis läheneb nimetatud integraalsumma määratud integraalile $\int_a^b f(x)dx$. Kokkuvõttes, piirporotsessis $\varrho_n \to 0$ saame ligikaudsest valemist (5.18) järgmise täpse valemi pindala jaoks:

$$S = \int_a^b f(x)dx\,. \tag{5.19}$$

Lõpuks tuleme veel tagasi valemi (5.18) juurde. Nagu nägime, seisab selle paremal poolel joonisel 5.2 kujutatud ristkülikute ühendi pindala. Valemit (5.18) saab kasutada määratud integraali $\int_a^b f(x)dx$ ligikaudseks arvutamiseks. Oma geomeetrilise sisu tõttu nimetatakse seda valemit *ristkülikvalemiks.*

**Näide**. Arvutame $\int_a^b dx = \int_a^b 1\, dx$. Kuna lõigule $[a, b]$ toetuva ja kõrgust 1 omava ristküliku pindala on $b - a$, siis $\int_a^b dx = b - a$.




Joonis 5.2

## 5.7 Määratud integraali omadused. Integraali keskväärtusteoreem.

**Määratud integraali omadusi.**

Me defineerisime määratud integraali $\int_a^b f(x)dx$ lõigul $[a, b]$. Et selline definitsioon omaks mõtet, peab kehtima võrratus $a < b$. Teatud põhjustel on aga vaja määratud integraali definitsiooni laiendada ka juhule kui $a \geq b$. Näiteks asendusvõtte rakendamise tulemusena (vt. §5.9) tekib sageli integraal, mille alumine raja on suurem kui ülemine. Alljärgnevatest omadustest esimesed kaks ongi definitsioonid, mis laiendavad määratud integraali juhule $a \geq b$.

1. $\int_a^a f(x)dx = 0,$

2. Kui $a > b$, siis $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$

Järgnev võrdus väidab, et integreerimislõikude liitmisel integraalide väärtused liituvad:

3. $\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx.$

Summa integraal võrdub integraalide summaga ja konstandi võib integraali märgi alt välja tuua:

4. $\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx,$

5. $\int_a^b Cf(x)dx = C\int_a^b f(x)dx,\ \ C$ - konstant.

Võrratus, mida rahuldavad kaks funktsiooni, laieneb ka nende funktsioonide integraalidele:

6. Kui $a \leq b$ ja $f(x) \leq g(x)$ iga $x \in [a, b]$ korral, siis $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$

**Integraali keskväärtusteoreem.**
*Kui $f(x)$ on pidev lõigul $[a, b]$, siis leidub sellel lõigul vähemalt üks punkt $c$ nii, et*

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)\int_a^b dx = f(c)\,(b - a)\,. \tag{5.20}$$

*Tõestus*: Kuna $f(x)$ on pidev lõigul $[a, b]$, saavutab ta sellel lõigul oma suurima ja vähima väärtuse (lõigul pidevate funktsioonide omadus 1 §2.11). Olgu $M$ suurim väärtus ja $m$ vähim väärtus. Siis kehtivad iga $x \in [a, b]$ korral võrratused $m \leq f(x) \leq M$. Määratud integraali omaduse 6 põhjal

$$\int_a^b m\,dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b M\,dx.$$

Kuna $m$ ja $M$ on konstandid, siis omaduse 5 põhjal $\int_a^b m\,dx = m\int_a^b dx$ ja $\int_a^b M\,dx = M\int_a^b dx$. Seega

$$m\int_a^b dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq M\int_a^b dx.$$

Jagades suurusega $\int_a^b dx$ saame

$$m \leq \frac{\int_a^b f(x)dx}{\int_a^b dx} \leq M.$$

Näeme, et arv $\frac{\int_a^b f(x)dx}{\int_a^b dx}$ paikneb funktsiooni $f(x)$ suurima ja vähima väärtuse vahel. Kuna lõigul $[a,b]$ pidev funktsioon $f(x)$ saavutab sellel lõigul iga väärtuse oma suurima ja vähima väärtuse vahel (lõigul pidevate funktsioonide omadus 2 §2.11), siis leidub vähemalt üks punkt $c \in [a,b]$ nii, et

$$f(c) = \frac{\int_a^b f(x)dx}{\int_a^b dx}.$$

Korrutades seda võrdust arvuga $\int_a^b dx$ ja arvestades, et $\int_a^b dx = b - a$, saame valemi (5.20). Teoreem on tõestatud.

## 5.8 Analüüsi põhiteoreem.

Oleme vaadelnud kahte liiki integraale: 1. määramata integraal $\int f(x)dx$ , mis on defineeritud kui funktsiooni $f$ algfunktsioonide üldavaldis; 2. määratud integraal, mis on defineeritud kui funktsiooni $f$ integraalsumma piirväärtus. Järgnev teoreem annab olulised seosed nende kahe integraali vahel.

**Analüüsi põhiteoreem**.

1. *Kui $f$ on pidev lõigul $[a,b]$, siis funktsioon $\Phi$, mis avaldub valemiga $\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$, on funktsiooni $f$ algfunktsioon lõigul $[a,b]$.*
2. *Kui $F$ on pideva funktsiooni $f$ algfunktsioon lõigul $[a,b]$, siis kehtib võrdus*

$$\int_a^b f(x)dx \;=\; F(b) - F(a) \;=:\; F(x)|_a^b\,. \tag{5.21}$$

Võrdust (5.21) nimetatakse *Newton-Leibnitzi valemiks.*

*Tõestus*: Väite 1 tõestamiseks peame näitama, et $\Phi'(x) = f(x)$ iga $x \in [a,b]$ korral. Olgu $x$ suvaline punkt lõigult $[a,b]$. Nagu tavaliselt, tähistame sümboliga $\Delta x$ argumendi $x$ muutu. Kasutades määratud integraali omadust 3 §5.7 arvutame:

$$\begin{aligned}\Phi(x+\Delta x) \;&=\; \int_a^{x+\Delta x} f(t)dt \;=\; \int_a^x f(t)dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt \\ &=\; \Phi(x) + \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt\,.\end{aligned}$$

Seega saame funktsiooni $\Phi$ muudu jaoks seose

$$\Delta\Phi \;=\; \Phi(x+\Delta x) - \Phi(x) \;=\; \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt\,. \tag{5.22}$$

Integraali keskväärtusteoreemi põhjal leidub punktide $x$ ja $x + \Delta x$ vahel punkt $c$ nii, et kehtib võrdus

$$\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt \;=\; f(c)(x + \Delta x - x) \;=\; f(c)\Delta x\,. \tag{5.23}$$

Täpsemalt: Kui $\Delta x > 0$, siis leidub integraali keskväärtusteoreemi põhjal lõigul $[x, x + \Delta x]$ punkt $c$ nii, et kehtib (5.23). Kui aga $\Delta x < 0$, siis leidub sama teoreemi põhjal lõigul $[x+\Delta x, x]$ punkt $c$ nii, et kehtib

$$\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt = -\int_{x+\Delta x}^{x} f(t)dt = -f(c)(x - x - \Delta x) = f(c)(x + \Delta x - x) = f(c)\Delta x,$$

st samuti kehtib (5.23).

Võttes (5.22) ja (5.23) kokku saame seose $\Delta\Phi = f(c)\Delta x$, millest järeldub et

$$\frac{\Delta\Phi}{\Delta x} = f(c)\,.$$

Selle võrduse vasakul pool olev jagatis koondub funktsiooni $\Phi$ tuletiseks punktis $x$ piirprotsessis $\Delta x \to 0$. Peale selle, kuna $c \in [x, x + \Delta x]$, siis $c \to x$, kui $\Delta x \to 0$. Kokkuvõttes saame võrduse

$$\Phi'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta\Phi}{\Delta x} = \lim_{c \to x} f(c) = f(x)\,.$$

Olemegi tõestanud, et $\Phi'(x) = f(x)$ iga $x \in [a, b]$ korral ja sellega ka väite 1.

Järgmiseks tõestame väite 2. Selle väite eelduse kohaselt on $F$ funktsiooni $f$ algfunktsioon lõigul $[a, b]$. Peale selle on äsjatõestatud väite 1 põhjal ka funktsioon $\Phi$ avaldisega $\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$ funktsiooni $f$ algfunktsioon lõigul $[a, b]$. Kuna ühe ja sama funktsiooni kaks algfunktsiooni võivad teineteisest erineda vaid liidetava konstandi võrra (vt §5.1), siis kehtib seos

$$\int_a^x f(t)dt = F(x) + C\,. \tag{5.24}$$

Järgnevalt leiame konstandi $C$ väärtuse. Selleks paneme avaldises (5.24) muutuja $x$ võrduma $a$-ga. Saame võrduse

$$\int_a^a f(t)dt = F(a) + C\,,$$

mille vasak pool võrdub nulliga määratud integraali omaduse 1 põhjal (vt §5.7). Seega, $0 = F(a) + C$, millest tuletame valemi $C = -F(a)$ konstandi $C$ jaoks. Nüüd saame kirjutada võrduse (5.24) kujul

$$\int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a)\,.$$

Pannes selles avaldises muutuja $x$ võrduma arvuga $b$ tuletame Newton-Leibnitzi valemi (5.21). Väide 2 ja teoreem on tõestatud.

## 5.9 Asendusvõte ja ositi integreerimine määratud integraali korral.

**Asendusvõte.** Vaatleme määratud integraali

$$\int_a^b f(x)dx\,. \tag{5.25}$$

Teeme integraali all asenduse valides uueks muutujaks $u$, mis sõltub $x$-st järgmisel viisil: $u = \varphi(x)$. Eeldame, et $\varphi$ on üksühene ja diferentseeruv. Tähistame $\varphi$ pöördfunktsiooni $\psi$-ga. Siis

$$x = \psi(u)\,. \tag{5.26}$$

Paneme kirja funktsiooni $\psi$ tuletise diferentsiaalide jagatisena: $\frac{dx}{du} = \psi'(u)$. Korrutades seda võrdust $du$-ga saame

$$dx = \psi'(u)du\,. \tag{5.27}$$

Kasutades valemeid (5.26) ja (5.27) saame integraali (5.25) all suurused $x$ ja $dx$ asendada vastavate $u$-st sõltuvate suurustega. Erinevalt määramata integraalist tuleb määratud integraali korral lisaks suurustele $x$ ja $dx$ asendada ka integreerimislõik koos rajadega. Uus integreerimislõik koosneb funktsiooni $u = \varphi(x)$ väärtustest, mis on saadud argumendi $x$ varieerimisel üle kogu esialgse integreerimislõigu $[a, b]$. Ühtlasi on uue integraali alumine raja võrdne $u$ väärtusega, mis vastab muutuja $x$ väärtusele $a$ ja ülemine raja on võrdne $u$ väärtusega, mis vastab muutuja $x$ väärtusele $b$. Seega on uue integraali alumine raja $\varphi(a)$ ja ülemine raja $\varphi(b)$. Kokkuvõttes saame järgmise valemi:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f[\psi(u)]\psi'(u)du\,. \tag{5.28}$$

**Ositi integreerimine**. Olgu $u = u(x)$ ja $v = v(x)$ kaks diferentseeruvat funktsiooni. Paneme kirja nende korrutise diferentsiaali avaldise:

$$d(uv) = vdu + udv\,.$$

Integreerime seda avaldist rajades $a$-st $b$-ni. Saame

$$\int_a^b d(uv) = \int_a^b vdu + \int_a^b udv\,. \tag{5.29}$$

Arvutame eraldi selle avaldise vasaku poole. Kuna $\int d(uv) = uv+C$ integraalide tabeli valemi 1 põhjal, siis Newton-Leibnitzi valemi tõttu

$$\int_a^b d(uv) = uv|_a^b\,.$$

Asendame selle võrduse seose (5.29) vasakusse poolde. Saame

$$uv|_a^b = \int_a^b vdu + \int_a^b udv\,.$$

Viies $\int_a^b vdu$ võrduse teisele poolele tuletame ositi integreerimise valemi määratud integraali jaoks:

$$\int_a^b udv = uv|_a^b - \int_a^b vdu\,. \tag{5.30}$$

## 5.10 Päratud integraalid.

**Lõpmatute rajadega päratud integraalid.**

1. *Päratu integraal poollõigul* $[a,\infty)$. Olgu antud funktsioon $f$, mis on pidev lõpmatul poollõigul $[a,\infty)$. Seega on $f$ pidev ka kõigil lõplikel lõikudel $[a,b]$, kus $b > a$. Järelikult eksisteerib määratud integraal $\int_a^b f(x)dx$ iga $b > a$ korral (vt §5.5). Vaatleme selle integraali käitumist protsessis $b \to \infty$. Piirväärtust $\lim\limits_{b\to\infty} \int_a^b f(x)dx$ nimetatakse funktsiooni $f$ päratuks integraaliks poollõigul $[a,\infty)$ ja tähistatakse $\int_a^\infty f(x)dx$. Seega definitsiooni kohaselt
$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)dx\,. \tag{5.31}$$

2. *Päratu integraal poollõigul* $(-\infty,b]$. Olgu $f$ pidev lõpmatul poollõigul $(-\infty,b]$. Päratu integraal $\int_{-\infty}^b f(x)dx$ defineeritakse järgmise piirväärtusega:
$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{a\to-\infty} \int_a^b f(x)dx\,. \tag{5.32}$$

3. *Päratu integraal tervel arvteljel* $(-\infty,\infty)$. Eeldame, et $f$ on pidev tervel arvteljel $(-\infty,\infty)$. Päratu integraal $\int_{-\infty}^\infty f(x)dx$ defineeritakse valemiga
$$\int_{-\infty}^\infty f(x)dx = \lim_{a\to\infty} \int_{-a}^a f(x)dx\,. \tag{5.33}$$

Päratut integraali nimetatakse koonduvaks, kui ta eksisteerib ja on lõplik. Vastasel juhul nimetatakse päratut integraali hajuvaks. Päratu integraali koonduvuse analüüsimisel saab kasutada nn. hindamisteoreeme. Esitame siinkohal kaks taolist teoreemi.

**Teoreem 1**. *Kui iga $x \geq a$ korral kehtivad võrratused $0 \leq f(x) \leq g(x)$ ja integraal $\int_a^\infty g(x)dx$ koondub, siis koondub ka integraal $\int_a^\infty f(x)dx$.*

Märki muutva funktsiooni päratu integraali hindamiseks saab kasutada näiteks järgmist teoreemi:

**Teoreem 2**. *Kui $\int_a^\infty |f(x)|dx$ koondub, siis koondub ka $\int_a^\infty f(x)dx$.*

**Päratud integraalid katkevatest funktsioonidest.** §5.5 toodud määratud integraali definitsioonis eeldasime, et $f$ on pidev lõigul $[a,b]$. Vaatleme nüüd juhtu, kui $f$ on katkev. Kui $f$-l on katkevuspunktid lõigul $[a,b]$, siis selle funktsiooni integraalsumma ei tarvitse omada lõplikku piirväärtust, seega ei eksisteeri viimasel juhul ka määratud integraali $\int_a^b f(x)dx$. Siiski on katkevat funktsiooni teatud juhtudel võimalik integreerida päratu integraali mõttes. Vaatleme kahte erijuhtu:

1. Olgu funktsioon $f$ pidev poollõigul $[a,b)$ ja olgu $b$ selle funktsiooni katkevuspunkt. Siis on $f$ pidev kõigil lõikudel $[a,c]$, kus $c$ on $a$ ja $b$ vahel, st $c \in (a,b)$. Järelikult eksisteerib määratud integraal $\int_a^c f(x)dx$ iga $c \in (a,b)$ korral. Selleks, et saada integraalist $\int_a^c f(x)dx$ integraali $\int_a^b f(x)dx$, tuleb meil lähendada arvuga $c$ arvu $b$. Kuna $c$ paikneb vahemikus $(a,b)$, on meil tegemist vasakpoolse piirväärtusega. Seega defineeritakse päratu integraal $\int_a^b f(x)dx$ järgmiselt:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{c\to b^-} \int_a^c f(x)dx\,.$$

2. Olgu funktsioon $f$ pidev poollõigul $(a,b]$ ja olgu $a$ selle funktsiooni katkevuspunkt. Siis on $f$ pidev kõigil lõikudel $[c,b]$, kus $c \in (a,b)$. Päratu integraal $\int_a^b f(x)dx$ defineeritakse järgmise parempoolse piirväärtusega:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{c\to a^+} \int_c^b f(x)dx\,.$$

Kui päratu integraal katkevast funktsioonist eksisteerib ja on lõplik, siis öeldakse, et ta koondub. Vastasel juhul öeldakse, et päratu integraal hajub.

## 5.11 Määratud intgraali rakendusi.

§5.5 tõime me näite määratud integraali rakendamise kohta töö arvutamisel. Selles paragrahvis vaatleme veel mõningaid määratud integraali rakendusi.

**Varda massi arvutamine.** Olgu vaatluse all varras (või mingi muu suhteliselt ühemõõtmeline materiaalne keha) pikkusega $l$. Paiknegu varras $x$-teljel punktide 0 ja $l$ vahel. Oletame, et varras on mittehomogeenne, st aine on vardas jaotunud ebaühtlaselt. Vaatleme suvalist varda osalõiku $\Delta l$. Tähistame osalõigu $\Delta l$ pikkuse $\Delta x$-iga. Olgu $\Delta l$-i mass $\Delta m$. Suhet $\gamma_{\Delta l} = \frac{\Delta m}{\Delta x}$ nimetatakse aine *keskmiseks joontiheduseks* osalõigul $\Delta l$. Osalõigu $\Delta l$ mass avaldub keskmise joontiheduse ja pikkuse kaudu järgmiselt: $\Delta m = \gamma_{\Delta l}\Delta x$.

Oletame, et osalõik $\Delta l$ kahaneb tõmbudes kokku punktiks $x$. Vaatleme aine keskmise joontiheduse $\gamma_{\Delta l}$ piirväärtust selles protsessis. Tegemist on suurusega, mis sõltub punkti $x$ asukohast, st on muutuja $x$ funktsioon. Tähistame selle funktsiooni $\gamma$-ga. Seega

$$\gamma(x) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta m}{\Delta x}\,.$$

Suurust $\gamma(x)$ nimetatakse aine *joontiheduseks* punktis $x$.

Püstitame järgmise ülesande. Olgu antud aine joontihedus $\gamma(x)$ kogu vardas, so lõigul $[0,l]$. Määrata tuleb varda mass $m$. Eeldame, et $\gamma(x)$ on pidev. Ülesande lahendamiseks jaotame lõigu $[0,l]$ osalõikudeks punktidega $0 =$

$x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = l$. Valime igal osalõigul $[x_{i-1}, x_i]$ ühe punkti $p_i$. Tähistame osalõigu $[x_{i-1}, x_i]$ pikkuse $\Delta x_i$-ga. Olgu osalõigule $[x_{i-1}, x_i]$ vastava varda osa mass $\Delta m_i$. Kui osalõik $[x_{i-1}, x_i]$ on väike, siis võib aine joontiheduse selle peal lugeda ligikaudselt konstantseks ja võrdseks arvuga $\gamma(p_i)$. Järelikult $\Delta m_i \approx \gamma(p_i)\Delta x_i$. Terve varda ligikaudse massi saame kui summeerime korrutised $\gamma(p_i)\Delta x_i$, st

$$m \approx \sum_{i=1}^{n} \gamma(p_i)\Delta x_i \,. \tag{5.34}$$

Mida peenem on lõigu $[0, l]$ jaotus, seda täpsem on ligikaudne võrdus $\Delta m_i \approx \gamma(p_i)\Delta x_i$, seega on seda täpsem ka valem (5.34). Teisest küljest, valemi (5.34) paremal poolel seisab funktisooni $\gamma$ integraalsumma lõigul $[0, l]$. Järelikult saame määratud integraali definitsiooni põhjal pikima osalõigu pikkuse $\varrho_n$ lähenemisel nullile järgmise täpse valemi varda massi jaoks:

$$m = \lim_{\varrho_n \to 0} \sum_{i=1}^{n} \gamma(p_i)\Delta x_i = \int_0^l \gamma(x)dx \,. \tag{5.35}$$

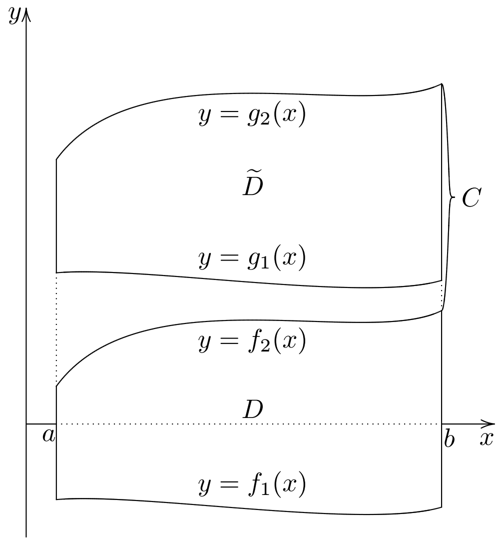
**Pindala arvutamine.** Olgu antud funktsioon $f(x) \geq 0$. Vaatleme joonisel 4.1 kujutatud joone $y = f(x)$ ja $x$-telje vahel paiknevat kõvertrapetsit. Nagu nägime §5.6, avaldub selle kõvertrapetsi pindala valemiga

$$S = \int_a^b f(x)dx \,. \tag{5.36}$$

Järgnevalt käsitleme pisut teistsugust juhtu. Vaatleme tasandilist kujundit $D$, mis on alt piiratud joonega $z = f_1(x)$ ja ülalt joonega $z = f_2(x)$, kusjuures $a \leq x \leq b$ (joonis 5.3). Meid huvitab $D$ pindala $S$. Näitame, et $S$ saab esitada $f_2$ ja $f_1$ vahe integraalina, st

$$S = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)]\, dx \,. \tag{5.37}$$

Valemi (5.37) tõestamiseks nihutame $D$ ülespoole $x$-telge. Selleks leiame sellise positiivse arvu $C$, mille korral kehtib võrratus $f_1(x) + C \geq 0$ ja defineerime funktsioonid $g_1(x) = f_1(x) + C$ ning $g_2(x) = f_2(x) + C$. Olgu $\widetilde{D}$ joonte $y = g_1(x)$ ja $y = g_2(x)$ vahel paiknev kujund. Tänu $C$ sobivale valikule asetseb kujund $\widetilde{D}$ $x$-telje peal (joonis 5.3). Märgime, et juhul kui $D$ asetseb juba $x$-telje peal, siis ei ole taolist nihutamise operatsiooni vaja teha, st $C = 0$ ja $\widetilde{D} = D$.




Joonis 5.3

Kujundite $D$ ja $\widetilde{D}$ pindalad on võrdsed. Järelikult tuleb $S$ leidmiseks arvutada $\widetilde{D}$ pindala. Kuna jooned $y = g_1(x)$ ja $y = g_2(x)$ asetsevad ülalpool $x$-telge (st $g_1(x) \geq 0, g_2(x) \geq 0$), siis võib kujundi $\widetilde{D}$ pindala arvutada selliselt, et lahutame joone $y = g_2(x)$ ja $x$-telje vahele jääva kõvertrapetsi pindalast joone $y = g_1(x)$ ja $x$-telje vahele jääva kõvertrapetsi pindala. Kuna valemi (5.36) põhjal võrdub $y = g_2(x)$ ja $x$-telje vahele jääva kõvertrapetsi pindala integraaliga $\int_a^b g_2(x)dx$ ning $y = g_1(x)$ ja $x$-telje vahele jääva kõvertrapetsi pindala integraaliga $\int_a^b g_1(x)dx$, siis $S = \int_a^b [g_2(x) - g_1(x)]\, dx$. Lõpuks arvutame

$$S = \int_a^b [g_2(x) - g_1(x)]\, dx = \int_a^b [f_2(x) + C - f_1(x) - C]\, dx$$
$$= \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)]\, dx\,.$$

Olemegi tõestanud valemi (5.37).

**Ruumala arvutamine ristlõigete pindalade järgi.** Olgu antud ruumiline keha $V$, mis paikneb tasandite $x = a$ ja $x = b$ vahel. Tähistame selle keha ruumala samuti $V$-ga. Tuletame valemi $V$ arvutamiseks.

Vaatleme keha $V$ lõiget $x$-teljega ristuva tasandiga (joonis 5.4). Tekkiva ristlõike pindala sõltub lõiketasandi asukohast, seega on ta muutuja $x$ funktsioon. Tähistame ristlõike pindala $S(x)$-ga. Eeldame, et $S(x)$ on pidev.

Tükeldame lõigu $[a, b]$ osalõikudeks punktidega $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$. Valime igal osalõigul $[x_{i-1}, x_i]$ ühe punkti $p_i$. Tähistame

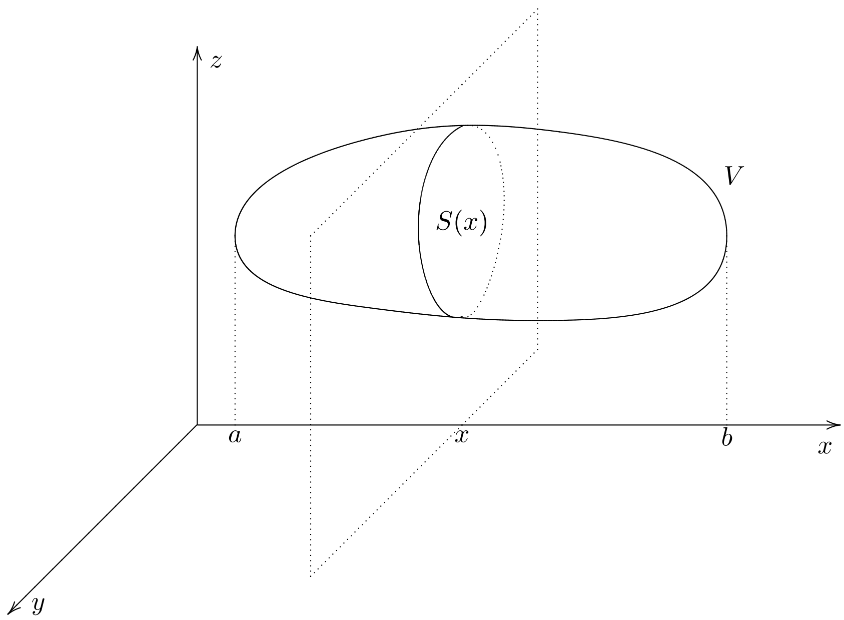
$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}.$$

Vaatleme tasandite $x = x_{i-1}$ ja $x = x_i$ vahele jäävat keha kihti $\Delta V_i$ (joonis 5.5). Kui $\Delta x_i$ on väike, siis muutub ristlõike pindala $S(x)$ osalõigul $[x_{i-1}, x_i]$ vähe ja me saame ta lugeda ligikaudselt võrdseks $S(p_i)$-ga, st

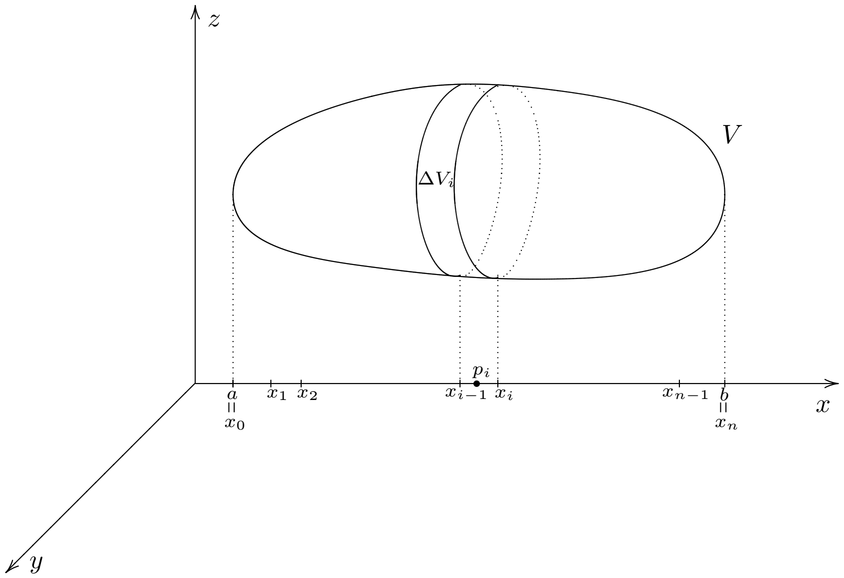
$$S(x) \approx S(p_i) \quad \text{kui} \quad x \in [x_{i-1}, x_i]\,.$$

Sellisel juhul on $\Delta V_i$ ligikaudselt silinder, mille põhja pindala ja kõrgus on vastavalt $S(p_i)$ ja $\Delta x_i$. Seega avaldub $\Delta V_i$ ruumala ligikaudselt valemiga

$$\Delta V_i \approx S(p_i)\Delta x_i\,.$$




Joonis 5.4




Joonis 5.5

Terve keha ruumala ligikaudse valemi saame summeerides $\Delta V_i$ ruumalad:

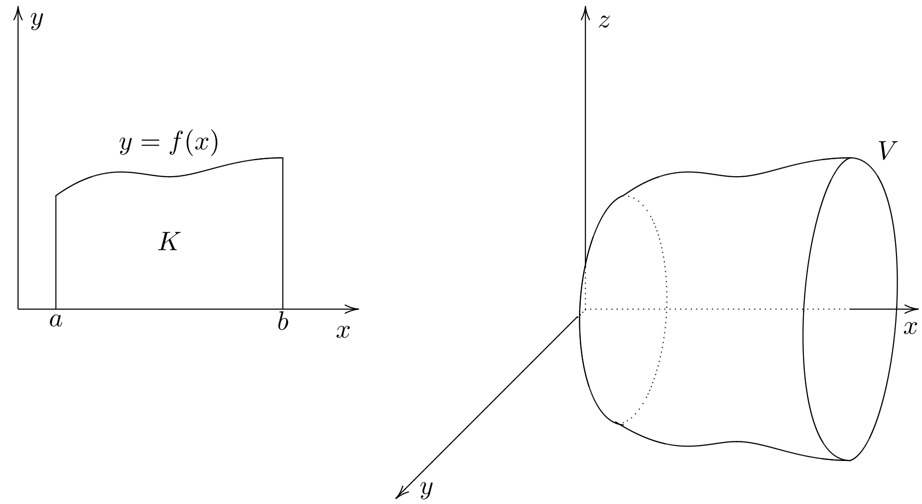
$$V \approx \sum_{i=1}^{n} S(p_i)\Delta x_i\,. \tag{5.38}$$

Mida peenem on lõigu $[a,b]$ jaotus, seda täpsem on ligikaudne võrdus $\Delta V_i \approx S(p_i)\Delta x_i$ ning seda täpsem on ka valem (5.38). Teisest küljest, valemi (5.38) paremal poolel seisab funktsiooni $S$ integraalsumma lõigul $[a,b]$. Järelikult saame määratud integraali definitsiooni põhjal pikima osalõigu pikkuse $\varrho_n$ lähenemisel nullile järgmise täpse valemi keha ruumala jaoks ristlõigete pindalade järgi:

$$V = \int_a^b S(x)\,dx\,. \tag{5.39}$$

*Erijuht: pöördkeha ruumala.* Olgu antud funktsioon $f$ lõigul $[a,b]$. Eeldame, et $f(x)$ on pidev ja $f(x) \geq 0$. Vaatleme joontega joontega $y = f(x)$, $x = a$, $x = b$ ja $y = 0$ piiratud kõvertrapetsit $K$ (joonis 5.6 vasakul). Paneme kujundi $K$ pöörlema ümber $x$-telje. Tulemusena saame pöördkeha $V$ (joonis 5.6 paremal). Keha $V$ lõikamisel $x$-teljega ristuva tasandiga tekkiv lõige on ring, mille raadius võrdub $f(x)$-ga (sest kujundi $K$ kõrgus punktis $x$ on $f(x)$). Seega on ristlõike pindala $S(x) = \pi f^2(x)$ ja üldisest valemist (5.39) saame järgmise valemi $V$ ruumala jaoks:

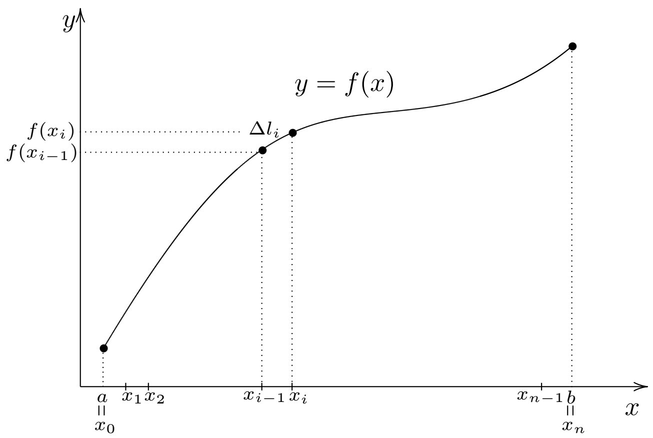
$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx\,. \tag{5.40}$$




Joonis 5.6

**Joone pikkuse arvutamine.** Olgu antud joon võrrandiga $y = f(x)$, kus $a \leq x \leq b$. Tähistame selle joone pikkuse $l$-ga. Meid huvitab valem $l$ arvutamiseks. Eeldame, et $f(x)$ on diferentseeruv.

Jaotame lõigu $[a, b]$ osalõikudeks punktidega $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$ (joonis 5.7).

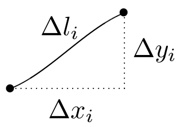



Joonis 5.7

Tähistame

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}\,, \quad \Delta y_i = f(x_i) - f(x_{i-1})\,.$$

Vaatleme osalõigu $[x_{i-1}, x_i]$ kohale jäävat joone osakaart $\Delta l_i$. See osakaar on suurendatult kujutatud joonisel 5.8.




Joonis 5.8

Kuna $f(x)$ on eelduse kohaselt diferentseeruv, on vaadeldav joon sile. Sile joon on aga sirgestuv (st suurendamisel muutub "sirgemaks"). Järelikult on väikese $\Delta x_i$ korral osakaar $\Delta l_i$ ligikaudselt sirglõik ja joonisel 5.8 on ligikaudne täisnurkne kolmnurk. Seega võime me $\Delta l_i$ pikkuse arvutamisel kasutada Pythagorase teoreemi. Tähistades $\Delta l_i$ pikkuse samuti $\Delta l_i$-ga saame

$$\Delta l_i \approx \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2}\,. \tag{5.41}$$

Edasi avaldame selles valemis esineva funktsiooni muudu $\Delta y_i$ argumendi muudu $\Delta x_i$ kaudu. Selleks sobib kasutada Lagrange'i teoreemi (vt §3.6). Nimetatud teoreemi põhjal leidub vahemikus $(x_{i-1}, x_i)$ punkt $p_i$ nii, et kehtib võrdus

$$f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'(p_i)(x_i - x_{i-1})\,.$$

Seega

$$\Delta y_i = f'(p_i)\Delta x_i$$

ja valemit (5.41) saab teisendada järgmiselt:

$$\Delta l_i \approx \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (f'(p_i)\Delta x_i)^2} = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + [f'(p_i)]^2(\Delta x_i)^2} =$$
$$= \sqrt{1 + [f'(p_i)]^2}\,\Delta x_i\,.$$

Terve joone ligikaudse pikkuse saame kui summeerime $\Delta l_i$ ligikaudsed pikkused:

$$l \approx \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + [f'(p_i)]^2}\,\Delta x_i\,. \tag{5.42}$$

Mida väiksem on $\Delta x_i$, seda "sirgem" on osakaar $\Delta l_i$, järelikult seda täpsem on ka ligikaudne võrdus (5.41). Sellest tuleneb, et mida väiksemad on osalõigud, seda täpsem on valem (5.42). Teisest küljest, valemi (5.42) paremal poolel seisab funktsiooni $\sqrt{1 + [f'(x)]^2}$ integraalsumma lõigul $[a, b]$. Järelikult pikima osalõigu pikkuse $\varrho_n$ lähenemisel nullile saame järgmise täpse valemi vaadeldava joone pikkuse jaoks:

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx\,. \tag{5.43}$$