Funktsioon. Määramispiirkond, väärtuste hulk. Pöördfunktsioon.

Seaduspärasust või teisendust, mis igale X elemendile x seab vastavuse ühe hulga Y elemendi y nim. argumendi x **funktsiooniks** ja kirjutatakse $y=f(x)$

Funktsiooni $y=f(x)$ **määramispiirkonnaks** on kõigi nende argumendi x väärtuste hulk, mille korral funktsioon omab mõtet ja on lõpliku väärtusega.

Funktsiooni **väärtuste hulgaks** nim. nende väärtuste hulka, mida funktsioon omandab, kui läbib kogu määramispiirkonna.

Tingimused, mis peavad olema täidetud elementaarfunktsioonide kaudu esitatud reaalmuutuja funktsioonil:

1) $\dfrac{B(x)}{A(x)} \Rightarrow A(x) \neq 0$
2) $\sqrt[2x]{A(x)} \Rightarrow A(x) \geq 0$
3) $log_a A(x) \Rightarrow A(x) > 0$
4) $\begin{matrix} \arcsin A(x) \\ \arccos A(x) \end{matrix} \Rightarrow -1 \leq A(x) \leq 1$

Funktsiooni $y=f(x)$ **pöördfunktsioon**iks nim. f-ni $y=g(x)$, mis igale funktsiooni f väärtusele y seab vastavusse need argumendi x väärtused, mille korral $y=f(x)$

Olgu funktsioonid $y=f(x)$ ja $y=g(x)$, siis väärtus y on teisendatud argumendi x **liitfunktsioon**iks ehk kompositsiooniks
$y=f[g(x)]=f*g(x)$

Funktsiooni piirväärtus. Teoreemid piirväärtuste kohta (tõestusega).

Arv a on **funktsiooni** $y=f(x)$ **piirväärtuseks** tingimusel, et $x \to x_0$,
kui $\forall \varepsilon>0, \ \exists \delta(\varepsilon)>0$, et $0<|x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)-a|<\varepsilon$

Selleks, et funktsioonil $y=f(x)$ oleks piirväärtus, kui $x \to x_0$ on piisav ja tarvilik, et eksisteeriksid ühepoolsed piirväärtused ja et nad oleks võrdsed.

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = a$$

Teoreemid piirväärtuste kohta.

Teoreem 1 Selleks, et funktsioonil oleks piirväärtus on piisav ja tarvilik, et funktsiooni saaks esitada kujul $f(x)=a+\alpha(x)$, $\alpha(x)$ on lõpmatult vähenev suurus, s.t. $\lim_{x \to x_0} \alpha(x)=0$

Tõestus:

1) Piisavus $f(x)=a+\alpha(x) \Rightarrow \lim_{x \to x_0} f(x)=a$

Tõepoolest: $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} (a+\alpha(x)) = a + \lim_{x \to x_0} \alpha(x) = a$

$\forall \varepsilon>0, \ \exists \delta(\varepsilon)>0$, et $0<|x-x_0|<\delta \Rightarrow |\alpha(x)|<\varepsilon$

Kuid $\alpha(x)=f(x)-a$

Järelikult $\forall \varepsilon>0, \ \exists \delta(\varepsilon)>0$, et $0<|x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)-a|<\varepsilon$

seega $\lim_{x \to x_0} f(x)=a$

2) Tarvilikkus: $\lim_{x \to x_0} f(x)=a \Rightarrow f(x)=a+\alpha(x)$

Vastavalt piisavuse definitsioonile $\forall \varepsilon>0, \ \exists \delta(\varepsilon)>0$, et $0<|x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)-a|<\varepsilon$

Tähistame $f(x)-a=\alpha(x)$, sel juhul saame $0<|x-x_0|<\delta \Rightarrow |\alpha(x)|<\varepsilon$

Seega $\alpha(x)$ on lõpmatult kahanev, saan $\lim_{x \to x_0} \alpha(x)=0$

m.o.t.t.

Teoreem 2 Olgu olemas piirväärtused $\lim_{x \to x_0} f(x)=a$, $\lim_{x \to x_0} g(x)=b$, siis

1) $\lim_{x \to x_0} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \to x_0} f(x) \pm \lim_{x \to x_0} g(x) = a \pm b$

2) $\lim_{x \to x_0} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim_{x \to x_0} g(x) = a \times b$

3) $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to x_0} f(x)}{\lim_{x \to x_0} g(x)} = \frac{a}{b}$, kus $b \neq 0$

Tõestus:

$\lim_{x \to x_0} f(x)=a$, $\lim_{x \to x_0} g(x)=b \neq 0$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to x_0} f(x)}{\lim_{x \to x_0} g(x)} = \frac{a}{b}$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a}{b} + \left(\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{a}{b}\right) = \frac{a}{b} + \frac{bf(x) - ag(x)}{bg(x)}$$

Vastavalt teoreemile 5.1 saame $f(x) = a + \alpha(x)$, $g(x) = b + \beta(x)$,
kus $\alpha(x)$, $\beta(x) \to 0$, kui $x \to x_0$

$$\frac{bf(x) - ag(x)}{bg(x)} = \frac{b(a + \alpha(x)) - a(b + \beta(x)}{b(b + \beta(x))} = \frac{b\alpha(x) - a\beta(x)}{b(b + \beta(x))}$$

$b\alpha(x)$, $a\beta(x)$ on lõpmatult vähenev suurus (*a* ja *b* on tõestatud)

$b(b + \beta(x)) \to b^2 \neq 0$, seega $\left|\frac{1}{b(b + \beta(x))}\right| \leq M$

Seega $\gamma(x)$ on lõpmatult vähenev suurus, kui $x \to x_0$,

siis $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a}{b} + \gamma(x)$, mis tähendabki, et $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a}{b}$

m.o.t.t.

Teoreem 3 (kahe politseiniku teoreem)
Olgu punkti x_0 teatud ümbruses
$U_r(x) =]x_0 - r; x_0 + r[$, kehtivad võrratused
(5.1) $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$
ja olgu $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$, $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = a$
siis eksisteerib
$\lim\limits_{x \to x_0} h(x) = a$

Tõestus: Vastavalt piirväärtuse definitsioonile
$\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta_1(\varepsilon) > 0$, et $0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon$
$\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta_2(\varepsilon) > 0$, et $0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |g(x) - a| < \varepsilon$
Olgu $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$, siis $0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon$, $|g(x) - a| < \varepsilon$
$|f(x) - a| < \varepsilon$
$-\varepsilon < f(x) - a < \varepsilon$
$a - \varepsilon < f(x) < a + \varepsilon$
$a - \varepsilon < g(x) < a + \varepsilon$
Võrratusest (5.1) järeldub, et
$a - \varepsilon < g(x) \leq h(x) \leq g(x) < a + \varepsilon$
Seega $a - \varepsilon < h(x) < a + \varepsilon$
$-\varepsilon < h(x) - a < \varepsilon$
$|h(x) - a| < \varepsilon$
Järelikult $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta(\varepsilon) > 0$, et $0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |h(x) - a| < \varepsilon$, mis tähendabki, et $\exists \lim\limits_{x \to x_0} h(x) = a$

m.o.t.t.

Teoreem 4 Olgu punkti x_0 teatud ümbruses kehtiv võrratus $f(x) > 0$
Kui funktsioonil $f(x)$ on piirväärtus tingimusel, et $x \to x_0$, siis piirväärtus peab olema mittenegatiivne $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a \geq 0$

Tõestus: Oletame, et $a>0$
Siis $\left|f(x)-a\right| \geq \left|a\right|$, sest $f(x) \geq 0$ $a>0$
Kuid teoreemi (5.1) järgi peab $f(x) - a$ olema lõpmatult vähenev suurus ja seega muutub kui tahes väikeseks
Seega $a>0$ on võimatu ja $a \geq 0$

m.o.t.t.

Järeldus 5.1 Kui on täidetud võrratus $f(x) > g(x)$ punkti x_0 ümbruses ja funktsioonide $f(x)$ ja $g(x)$ piirväärtused eksisteerivad, siis $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \geq \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$
Tõepoolest $h(x) = f(x) - g(x) \geq 0$

Lõpmatult vähenevad suurused ja nende järk.

Definitsioon 1 Funktsiooni $\alpha(x)$ nim. **lõpmatult vähenevaks suuruseks** tingimusel, et $x \to x_0$, kui $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) = 0$

Piirväärtuse definitsiooni kohaselt $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta(\varepsilon) > 0$, et $0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |\alpha(x)| < \varepsilon$

Teoreem 1 Lõpliku arvu lõpmatult vähenevate väärtuste summa on samuti lõpmatult vähenev suurus

$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = \beta(x)$ $\quad \lim\limits_{x \to x_0} \beta(x) = 0$

Definitsioon 2 Funktsioon $f(x)$ on tõkestatud hulgal A, kui leidub selline positiivne konstant M, et $|f(x)| \le M$, kui $x \in A$

Teoreem 2 Lõpmatult väheneva suuruse ja tõkestatud suuruse korrutis on lõpmatult vähenev suurus

Tõestus: Olgu $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) = 0$

$|f(x)| \le M$, kui $x \in]x_0 - r; x_0 + r[$

$\beta(x) = \alpha(x) \times f(x)$

Vastavalt def. $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta(\varepsilon) > 0$, et $0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |\alpha(x)| < \dfrac{\varepsilon}{M}$

Seejuures saame $\delta \le r$

Siis saame, et $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta(\varepsilon) > 0$,

et $0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |\beta(x)| = |\alpha(x) \times f(x)| = |\alpha(x)| \times |f(x)| < \dfrac{\varepsilon}{M} \times M = \varepsilon$

m.o.t.t.

Olgu kaks lõpmatult vähenevat suurust $\alpha(x)$ ja $\beta(x)$, kui $x \to x_0$, s.t. $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to x_0} \beta(x) = 0$

Võrdlemine:

(8.1) $$\lim_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \begin{cases} 0, siis\, \alpha(x)\, järk > \beta(x)\, järk \\ \infty, siis\, \alpha(x)\, järk < \beta(x)\, järk \\ r \ne 0, \infty, siis\, \alpha(x)\, järk = \beta(x)\, järk \end{cases}$$

Kui $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$, siis $\alpha(x)$ ja $\beta(x)$ on ekvivalentsed

Definitsioon 3 Lõpmatult väheneva suuruse $\alpha(x)$ **järguks** nim. sellist arvu n, mille korral $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{(x - x_0)^n} = r \ne 0, \infty$

Piirväärtus $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ (tõestusega). Arv e ja piirväärtus $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$

Piirväärtus $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$.

$OB=1$

$S_{\Delta OAB}\le S_{OAB}\le S_{\Delta OAC}$

$S_{\Delta OAB}=\frac{1}{2}\times 1\times \sin x$

$S_{OAB}=\frac{1}{2}\times 1\times x$

$S_{\Delta OAC}=\frac{1}{2}\times 1\times \tan x$

$\frac{\sin x}{2}\le\frac{x}{2}\le\frac{\tan x}{2}\Big|\times\frac{2}{\sin x}$

$1\le\frac{x}{\sin x}\le\frac{1}{\cos x}$, siit saame, et $1\ge\frac{\sin x}{x}\ge\cos x$ (need võrratused kehtivad ka siis, kui $x<0$)

Eksisteerib piirväärtus $\lim_{x\to 0}\cos x=1$

Vastavalt teoreemile (5.3(2 politseiniku teoreem)) saame, et eksisteerib ka piirväärtus $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$

Arv *e*.

Teoreem 1 $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$, kus $n\in Z$

Tõestus: Newtoni binoomvalem

$(a+b)^n=a^n+\frac{n}{1!}a^{n-1}b+\frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}a^{n-3}b^3+...+\frac{n(n-1)(n-2)...(n-(n-2))}{(n-1)!}ab^{n-1}+b^n$

$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1+\frac{n}{1!}\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{2!}\frac{1}{n^2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\frac{1}{n^3}+...+\frac{n(n-1)..2}{(n-1)!}\frac{1}{n^{n-1}}+\frac{1}{n^n}=$

$=1+1+\frac{1}{2!}1\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}1\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+...+\frac{1}{n-1}1\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\left(1-\frac{n-2}{n}\right)+\frac{1}{n^n}$

$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\ge 2$; $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ on kasvav funktsiooni *n* suhtes

$1-\frac{1}{n}>1-\frac{1}{n-1}$

Ja liikmete arv kasvab ühe võrra, kuna $\left(1+\frac{1}{n}\right)<1$, $\left(1+\frac{2}{n}\right)<1$ jne.

$\frac{1}{2!}=\frac{1}{2}$; $\frac{1}{3!}<\frac{1}{2^2}$; $\frac{1}{4!}<\frac{1}{2^3}$; $\frac{1}{n-1}<\frac{1}{2^{n-2}}$; $\frac{1}{n^n}=\frac{1}{n!}\frac{n!}{n^n}<\frac{1}{2^{n-2}}$

$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+...+\frac{1}{2^{n-1}}$

$2\le\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<3$

Kui funktsioon on kasvav ja on tõkestatud ülevalt $f(x)\le M$, siis eksisteerib piirväärtus $\lim_{x\to\infty}f(x)=a$

Antud juhul $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ on kasvav n kasvades ja on tõkestatud ülevalt arvuga 3

Piirväärtust $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$ nim. arvuks *e*

Teoreem 2 Kehtib valem (7.1) $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$

Tõestus:

1) Vaatleme algul juhust, kui $x\to+\infty$

Iga *x* jaoks eksisteerib niisugune $n\in N$, et $n\le x<n+1$

Seega $\frac{1}{n} \geq \frac{1}{x} > \frac{1}{n+1}$

Siit saame $\left(1+\frac{1}{n}\right)^x \geq \left(1+\frac{1}{x}\right)^x > \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^x$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \geq \left(1+\frac{1}{x}\right)^x > \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n$$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \geq \left(1+\frac{1}{x}\right)^x > \frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)}$$

Leiame piirväärtused

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1\cdot e = e$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)} = \frac{e}{1} = e$$

Kahe politseiniku teoreemi põhjal saame, et eksisteerib piirväärtus $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$

2) Olgu $x \to -\infty$

Tähistame $x = -(y+1)$

Kui $x \to -\infty \Leftrightarrow y \to +\infty$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{-(y+1)}\right)^{-y-1} = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{y}{y+1}\right)^{-y-1} = \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^y\cdot\left(1+\frac{1}{y}\right) = e$$

m.o.t.t.

Funktsiooni pidevus. Ühepoolsed piirväärtused, katkevuspunktid. Teoreemid lõigul pideva funktsiooni kohta.

Definitsioon 1 Funktsioon $y = f(x)$ on **pidev** punktis x_0, kui kehtib (9.2) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

Teiste sõnadega $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta(\varepsilon) > 0$, et $0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

Funktsioon on pidev paremalt punktis x_0, kui (9.2) $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0)$

Funktsioon on pidev vasakult punktis x_0, kui (9.2)` $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = f(x_0)$

Definitsioon 2 Funktsioon $y = f(x)$ on **pidev antud vahemikus** (lahtine hulk), kui ta on pidev selle vahemiku igas punktis

Funktsioon $y = f(x)$ on **pidev antud lõigul** $[a, b]$, kui ta on pidev vahemikus $]a, b[$, on pidev paremalt punktis a ja on pidev vasakult punktis b

Elementaarfunktsioonid on pidevad kogu oma määramispiirkonnas

Definitsioon 3 Funktsiooni $y=f(x)$ **piirväärtus vasakult** $x \to x_0$ märgitakse $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = b$

seejuures $x \to x_0$ nii, et $x < x_0$

Funktsiooni $y=f(x)$ **piirväärtus paremalt** $x \to x_0$ märgitakse $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = c$

seejuures $x \to x_0$ nii, et $x > x_0$

Neid piirväärtusi nimetatakse **ühepoolseteks**

Definitsioon 4 Katkevuspunktideks nim. argumendi x väärtuseid, mille korral funktsioon ei ole pidev, kuid nende punktide piisavalt väikeses ümbruses on pidev

Katkevuspunktide liigid:

Olgu katkevuspunkt x_0 ja $\lim\limits_{x \to x_0 - o} f(x) = A$, $\lim\limits_{x \to x_0 + o} f(x) = B$

1) $A=B$, kuid $f(x)$ ei ole määratud punktis x_0

Punkti x_0 nim. kõrvaldatavaks katkevuspunktiks

Kui defineerida, et $f(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A = B$, siis saame funktsiooni, mis on pidev kohal x_0

2) A ja B eksisteerivad ja on lõplikud, kuid seejuures $A \neq B$

Punkt x_0 on I liiki katkevuspunkt ehk hüppekoht

3) Kus A või B on lõpmatu või ei eksisteeri üldse

Punkti x_0 on II liiki katkevuskoht

Teoreem 1 Olgu funktsioonid $y = f(x)$ ja $y = g(x)$ pidevad hulgal M.

Siis on pidevad ka funktsioonid:

1) $f(x) + g(x)$

2) $f(x) \cdot g(x)$

3) $\dfrac{f(x)}{g(x)}$, kus $g(x) \neq 0$, kui $x \in M$

Tõestus järeldub vastavast teoreemist piirväärtuste kohta.

Teoreem 2 Olgu funktsioon $y = f(x)$ pidev lõigul $[a, b]$
Siis leidub vähemalt üks niisugune punkt $x_1 \in [a, b]$, kus funktsioon saavutab oma suurima väärtuse ja samuti vähemalt üks punkt $x_2 \in [a, b]$, kus funktsioon saavutab oma vähima väärtuse sellel lõigul.

(10.1)
$$\begin{aligned} f(x_1) &= \sup f(x), \quad x_1 \in [a, b] = M \\ f(x_2) &= \inf f(x), \quad x_2 \in [a, b] = m \end{aligned}$$

Teoreem 3 Olgu funktsioon $y = f(x)$ pidev lõigul $[a, b]$
Siis mistahes väärtuse jaoks, mis asub funktsiooni vähim ja suurima väärtuse vahel $m \le k \le M$ leidub vähemalt üks selline punkt $x_3 \in [a, b]$, et $f(x_3) = k$

Järeldus: Kui funktsioon on pidev lõigul $[a, b]$ ja $f(x_1) > 0$ ja $f(x_2) < 0$, $x_1, x_2 \in [a, b]$.
Siis leidub niisugune $x_3 \in \left]x_1, x_2\right[$, et $f(x_3) = 0$

Funktsiooni tuletis ja selle geomeetriline tähendus. Puutuja ja normaali võrrand.

Olgu antud funktsioon $y = f(x)$
Anname argumendile x muudu Δx
Siis funktsioon saab vastava muudu $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$

Definitsioon 1 Funktsiooni $y = f(x)$ **tuletiseks** nimetatakse piirväärtust

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Kui me võtame piirväärtuse paremalt, siis saame ka tuletise paremalt $\lim\limits_{\Delta x \to 0+0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$

Kui me võtame piirväärtuse vasakult, siis saame ka tuletise vasakult $\lim\limits_{\Delta x \to 0-0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$

<u>*Järeldus:* Funktsiooni tuletis eksisteerib siis ja ainult siis, kui eksisteerivad tuletised nii vasakult ja paremalt ja nad on võrdsed.</u>

Teoreem 1 Olgu funktsioonil $y = f(x)$ tuletis kohal x
Siis see funktsioon on pidev selles punktis.
Tõestus: Vastavalt eeldusele eksisteerib piirväärtus $y'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$

Siit järeldub $\frac{\Delta y}{\Delta x} = y'(x) + \alpha(\Delta x)$, kus $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x) = 0$
Seega $\Delta y = y'(x) \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x$
$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$
$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta(\varepsilon) > 0$, et $0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$
$0 < |\Delta x| < \delta \Rightarrow |\Delta y| < \varepsilon$
$y'(x)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x = \beta(\Delta x) \xrightarrow{\Delta x \to 0} 0$
Seega $\beta(\Delta x)$ on lõpmatult vähenev suurus
$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta(\varepsilon) > 0$, et $0 < |\Delta x| < \delta \Rightarrow |\beta(\Delta x)| < \varepsilon$
Järelikult $y = f(x)$ on pidev.

Märkus: Teoreemi 11.1 pöördteoreem ei pea paika. Funktsioon võib olla pidev, kuid mitte-diferentseeruv.

Definitsioon 2 Funktsioon on diferentseeruv punktis x, kui tal on tuletis selles punktis.
Funktsioon on diferentseeruv mingis vahemikus, kui ta on diferentseeruv selle vahemiku igas punktis.

Kui $\Delta x \to 0$, siis lõikaja PQ muutub puutujaks PT ja nurk $\beta \to \alpha$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \tan \beta = \tan \alpha$$

Tuletis y' on **geomeetriliselt** võrdne kõverjoone $y = f(x)$ tõmmatud puutuja tõusuga (tõusunurga tangensiga)

$k = \tan\alpha = y'$

Sirge võrrand, mis läbib punkti A (x_0, y_0) tõusuga k on $y - y_0 = k(x - x_0)$

Kõverjoone $y = f(x)$ **puutuja** punktis $x = x_0$

$y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0)$, kus $y_0 = f(x_0)$

Kaks sirget tõusudega k_1 ja k_2 on risti siis ja ainult siis, kui $k_1 \times k_2 = -1$ ehk $k_2 = -\frac{1}{k_1}$

Seega **normaali võrrand** kõverjoonel $y = f(x)$ on $y - y_0 = -\frac{1}{y'(x_0)}(x - x_0)$

Teoreem diferentseeruva funktsiooni pidevusest (tõestusega).

Teoreem 1 Olgu funktsioonil $y = f(x)$ tuletis kohal x
Siis see funktsioon on pidev selles punktis.

Tõestus: Vastavalt eeldusele eksisteerib piirväärtus $y'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$

Siit järeldub $\frac{\Delta y}{\Delta x} = y'(x) + \alpha(\Delta x)$, kus $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x) = 0$

Seega $\Delta y = y'(x) \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x$

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

$\forall\, \varepsilon>0,\ \exists\, \delta(\varepsilon) >0,$ et $0<\left| x-x_0 \right| < \delta \Rightarrow \left| f(x)-f(x_0) \right| < \varepsilon$

$0<\left| \Delta x \right| < \delta \Rightarrow \left| \Delta y \right| < \varepsilon$

$y'(x)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x = \beta(\Delta x) \xrightarrow{\Delta x \to 0} 0$

Seega $\beta(\Delta x)$ on lõpmatult vähenev suurus

$\forall\, \varepsilon>0,\ \exists\, \delta(\varepsilon) >0,$ et $0<\left| \Delta x \right| < \delta \Rightarrow \left| \beta(\Delta x) \right| < \varepsilon$

Järelikult $y = f(x)$ on pidev.

Märkus: Teoreemi 1 pöördteoreem ei pea paika. Funktsioon võib olla pidev, kuid mittediferent-seeruv.

Liitfunktsiooni ja pöördfunktsiooni tuletis (tõestusega).

Teoreem 1 Olgu funktsioonil $u(x)$ tuletis punktis x ja funktsiooni $f(n)$ tuletis punktis n
Sel juhul on tuletis ka **liitfunktsioonil** $f[u(x)]$

(13.1) $\left(f[u(x)]\right)' = f_u' \cdot u'$

Tõestus:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}, \text{ kuna } f_u' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta u}$$

$$u' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x},$$

siis $\Delta x \to 0 \Rightarrow \Delta u \to 0 \Rightarrow \Delta f \to 0 = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta u}\cdot \lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x} = f_u' \cdot u'$

m.o.t.t.

Teoreem 2 Kui funktsioon $y = f(x)$ on diferentseeruv punktis x, siis selle **pöördfunktsioon** $x = g(y)$ on samuti diferentseeruv punktis y $(y = f(x))$

Seejuures nende tuletiste vaheline seos on järgmine

$$f'(x) = \frac{1}{g'(y)}$$

Tõestus: Eelduse kohaselt eksisteerib tuletis

$$y' = f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta y} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\frac{\Delta x}{\Delta y}} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\frac{g(y+\Delta y)-g(y)}{\Delta y}} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{g'(y)}$$

$$y = f(x) \Leftrightarrow x = g(y)$$

$$\Delta x = g(\Delta y)$$

m.o.t.t.

Näited:

1. $y = e^x$ $\quad y = \ln x$

$(e^x)' = e^x$ $\quad e^y = e^{\ln x} = x$

$$(\ln x)' = \frac{1}{(e^x)'} = \frac{1}{e^y} = \frac{1}{x}$$

Analoogselt

$$(a^x)' = a^x \ln a \Rightarrow (\log_a x)' = \frac{1}{x\ln a}$$

2. $y = \sin x$ $\quad y = \arcsin x$

$(\sin x)' = \cos x$ $\quad x = \sin x$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{(\tan y)'} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 x}} = \frac{1}{\tan^2 y} = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\sin^2 y + \cos^2 y = 1$$

$$\cos y = \pm\sqrt{1-\sin^2 x} = \pm\sqrt{1-x^2}$$

Samuti on

$$(\cos)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

3. $y = \tan x$ $\quad y = \arctan x$

$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$ $\quad y = \tan(\arctan x) = x$

$$(\arctan x)' = \frac{1}{(\tan y)'} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 y}} = \frac{1}{\tan^2 y} = \frac{1}{1+x^2}$$

$$1 + \tan^2 y = 1 + \frac{\sin^2 y}{\cos^2 y} = \frac{\cos^2 y + \sin^2 y}{\cos^2 y} = \frac{1}{\cos^2 y}$$

Parameetrilise funktsiooni ja ilmutamata funktsiooni tuletis (tõestusega).

Definitsioon 1 Ühe muutuja funktsioon on esitatud **parameetrilisel kujul**, kui nii argument x kui ka funktsiooni väärtus y on antud parameetri (t) funktsioonis.

(9.1) $\begin{cases} x = u(t) \\ y = v(t) \end{cases}$

Näide:

$\begin{cases} x = R\cos t \\ y = R\sin t \end{cases}$ (ringjoone parameetriline võrrand)

$x^2 + y^2 = R^2\cos^2 t + R^2\sin^2 t = R^2$

$x^2 + y^2 = R$

Teoreem 1 Parameetriliselt esitatud funktsiooni (9.1) tuletis avaldub kujul

(9.2) $y' = \dfrac{\overset{\circ}{y}}{\overset{\circ}{x}}$, kus $\overset{\circ}{y} = y'(t) = v'$

$\overset{\circ}{x} = x'(t) = u'$

Tõestus: Vastavalt definitsioonile

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{\Delta y}{\Delta t}}{\frac{\Delta x}{\Delta t}}$$

Et funktsioonidel $x = u(t)$ ja $y = v(t)$ on tuletised kohal t, siis muutudele Δx ja Δy vastab parameetri muut Δt.

$\Delta x \to 0 \Leftrightarrow \Delta t \to 0$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{\Delta y}{\Delta t}}{\frac{\Delta x}{\Delta t}} = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{\overset{\circ}{y}}{\overset{\circ}{x}}$$

Märkus: Teoreemi (9.1) saab tõestada

$$y' = (u(t))' = u_t' \cdot t'(x)$$

pöördfunktsiooni $t = t(x)$ tuletis

$$t'(x) = \frac{1}{v'(f)}$$

järelikult $y' = \dfrac{u'}{v'} = \dfrac{\overset{\circ}{y}}{\overset{\circ}{x}}$

Definitsioon 2 Funktsioon on esitatud **ilmutamata** kujul, kui on antud avaldis, mis sisaldab nii argumenti x kui ka funktsiooni väärtust y ja võrdub nulliga.

(9.3) $F(x, y) = 0$

Näited:

1. $x^2 + y^2 = 1$ (ühikringjoone ilmutamata kuju)

$y = \pm\sqrt{1 - x^2}$ (ilmutatud kuju)

2. $x^2 y + \sin xy = 0$ (ilmutamata funktsioon)
Võtame mõlema poole tuletise, eeldades, et y on x-i funktsioon.

$$2xy + x^2 y' + \cos y(y + cy') = 0$$
$$2xy + y\cos yx + (x^2 + x\cos y)y' = 0$$
$$y' = \frac{2xy + y\cos xy}{x^2 + x\cos xy}$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = y2x + y\cos xy$$
$$\frac{\partial F}{\partial y} = x^2 + x\cos xy$$

Definitsioon 3 Kahe muutuja funktsiooni $F(x, y)$ osatuletis x-i järgi saadakse võttes teine muutuja y konstantseks.

(9.5) $$\frac{\partial F}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x + \Delta x, y)}{\Delta x}$$

Analoogselt osatuletis y-i järgi saadekse nii, et $x = const$

(9.5) $$\frac{\partial F}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{F(x, y + \Delta y)}{\Delta y}$$

Teoreem 2 Ilmutamata funktsiooni $F(x, y) = 0$ tuletis avaldub kujul

(9.5) $$y' = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}$$

Tõestus: Diferentseerides ilmutamata funktsiooni avaldist ja eeldades, et y on x-i funktsioon saame

$$F(x, y) = 0$$
$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} y' = 0$$
$$y' = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}$$

Funktsiooni diferentsiaal ja selle geomeetriline tähendus. Funktsiooni ligikaudne arvutamine diferentsiaali abil.

Definitsioon 1 Funktsiooni $y = f(x)$ **diferentsiaaliks** nimetatakse tema muudu lineaarset osa (argumendi muudu suhtes).
Kui funktsioon muut on esitatud kujul

$$\Delta y = A \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \text{ ja seejuures } \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\alpha(\Delta x)}{\Delta x} = 0$$

siis funktsiooni diferentsiaal

$$dy = A \cdot \Delta x \qquad A \text{ ei sõltu } x\text{-st}$$

Näited:

1. $y = e^{-x^2}$

$y' = e^{-x^2}(-2x) \qquad dy = -2xe^{-x^2}\,dx$

2. $y = \arctan\sqrt{x}$

$$y' = \frac{1}{1+x}\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)}$$

$$dy = \frac{dx}{2\sqrt{x}(1+x)}$$

Valemist $dy = y'(x) \cdot dx$ järeldub, et $y'(x) = \frac{dy}{dx}$

Seega parameetrilise funktsiooni tuletis

$$\begin{cases} x = u(t) \\ y = v(t) \end{cases} \qquad \overset{\circ}{x} = u'(t) = \frac{dx}{dt} \qquad \overset{\circ}{y} = v'(t) = \frac{dy}{dt} \qquad y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\overset{\circ}{y}}{\overset{\circ}{x}}$$

Geomeetriline tõlgendus:

$dy = y'(x)dx = y'(x) \cdot \Delta x$

$y'(x) = \tan\alpha$

$\frac{dy}{\Delta x} = y'(x) = \tan\alpha$

Funktsiooni diferentsiaal on kõverjoonele $y = f(x)$ tõmmatud puutuja ordinaadi muut, mis vastab argumendi numbrile

$$\Delta x = dx$$

Funktsiooni väärtuste ligikaudne arvutamine diferentsiaali abil.

Vastavalt diferentsiaali definitsioonile $\Delta y = dy + \alpha(\Delta x)$,

kus $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\alpha(\Delta x)}{\Delta x} = 0$

järelikult väikeste Δx-de korral kehtib

$\Delta y \approx dy$

$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$

$dy = y'(x) \cdot \Delta x = f(x) \cdot \Delta x$

$f(x + \Delta x) - f(x) \approx f'(x) \cdot \Delta x$

$f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x) \cdot \Delta x$

$x \to x_0$

$x + \Delta x \to x$

$\Delta x = x - x_0$

(10.1) $\quad f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x$

$$\Delta x = x - x_0$$

Valemi (10.1) täpsus on ligikaudu $(\Delta x)^2$

Näide:

$\sqrt[3]{1,96^2 + 4}$

$y = \sqrt[3]{x^2 + 4} \quad x = 1,96 \quad x_0 = 2 \quad \Delta x = x - x_0 = -0,04$

$y(x_0) = y(2) = \sqrt[3]{4 + 4} = 2$

$y' = \frac{1}{3}(x^2 + 4)^{-\frac{2}{3}} \cdot 2x = \frac{2x}{3(x^2 + 4)^{\frac{2}{3}}}$

$y'(x_0) = y'(2) = \frac{1}{3}$

$\sqrt[3]{1,96^2 + 4} \approx 2 + \frac{1}{3}(-0,04) = \frac{149}{75}$

$0,04^2 = 0,0016 \approx 0,002$

Teoreem diferentsiaali olemasolust (tõestusega).

Teoreem 1 Funktsioonil $y = f(x)$ **on diferentsiaal** parajasti siis, kui tal on lõplik tuletis vaadeldavas punktis ning seejuures

(11.1) $A(x) = y'(x)$

Tõestus:

1) Tarvilikkus:

Eksisteerigu dy $\Rightarrow$ eksisteerib $y'(x)$

Kui funktsioonil on diferentsiaal, siis $\Delta y = A \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x)$

Seega $\frac{\Delta y}{\Delta x} = A + \frac{\alpha(\Delta x)}{\Delta x}$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\left(A + \frac{\alpha(\Delta x)}{\Delta x} \right) = A(x)$$

2) Piisavus:

Eksisteerigu $y'(x)$ $\Rightarrow$ eksisteerib dy

Kui funktsioonil on tuletis, siis $y'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$

Järelikult $\frac{\Delta y}{\Delta x} = y'(x) + \beta(\Delta x)$,

kus $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \beta(\Delta x) = 0$

Korrutades seda võrdust Δx -ga saame

$$\Delta y = y'(x) \cdot \Delta x + \beta(\Delta x) \cdot \Delta x$$

Järelikult diferentsiaal eksisteerib ja on

(11.2) $dy = y'(x) \cdot \Delta x$

m.o.t.t.

Vaatleme funktsiooni $y = x$

Sel juhul $y' = 1$

$$dy = dx = \Delta x$$

Argumendi muut on võrdne tema diferentsiaaliga

Me saame valemi

(11.3) $dy = y'(x) \cdot dx$

Ilmutamata funktsiooni ja parameetrilise funktsiooni kõrgemat järku tuletised. Kõrgemat järku diferentsiaalid.

Ilmutatud funktsioonil saab vahetult leida suvalist järku tuletise

(12.1) $y^{(n)}(x) = (y^{(n-1)}(x))'$

Vaatleme **ilmutamata** funktsiooni

$F(x, y) = 0$

Selle esimene tuletis on

(12.2) $y' = -\dfrac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}$

Seega $y' = F_1(x, y)$

Siit saame $y'' = (y')' = (F_1(x, y))'$

$$y'' = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_1}{\partial y} y' = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_1}{\partial y} F_1 = F_2(x, y)$$

Üldiselt saame

(12.3) $y^{(n)} = \dfrac{\partial(y^{(n-1)})}{\partial x} + \dfrac{\partial(y^{(n-1)})}{\partial y} y'$

$n = 2,3...$

Näited:

$x^2 + y + \sin y = 0$

$$y' = -\frac{2x}{1+\cos y} = -2x(1+\cos y)^{-1}$$

$$\frac{\partial(y')}{\partial x} = \frac{-2}{1+\cos y}$$

$$\frac{\partial(y')}{\partial y} = -2x(-1)(1+\cos y)^{-2}(-\sin y) = -\frac{2x\sin y}{(1+\cos y)^2}$$

$$y'' = -\frac{2}{1+\cos y} - \frac{2x\sin y}{(1-\cos y)^2}\left(-\frac{2x}{1+\cos y}\right) = \frac{4x^2\sin y}{(1+\cos y)^2} - \frac{2}{1+\cos y}$$

Olgu antud **parameetriline** funktsioon

$$\begin{cases} x = u(t) \\ y = v(t) \end{cases}$$

(12.4) tema esimene tuletis $y' = \dfrac{\overset{\circ}{y}}{\overset{\circ}{x}}$

kus $\overset{\circ}{y} = v'(t)$, $\overset{\circ}{x} = v'(t)$

Et $y'' = (y')'$,

siis peame valemis (12.4) y asendama y'-ga.

(12.5) $y'' = \dfrac{\overset{\circ}{(y')}}{\overset{\circ}{x}}$

Jätkates seda protsessi saame üldiselt

(12.6) $y^{(n)} = \dfrac{\overset{\circ}{(y^{(n-1)})}}{\overset{\circ}{x}}$ $\qquad n = 1,2...$

Näited:

$$\begin{cases} x = 2\cos^2 t \\ y = 3\sin^3 t \end{cases}$$

$$\overset{\circ}{x} = 2\cdot 2\cos t(-\sin t) = -4\sin t\cos t$$

$$\overset{\circ}{y} = 3\cdot 3\sin^2 t\cdot\cos t = 9\sin^2 t\cos t$$

$$y' = \frac{9\sin^2 t\cos t}{-4\sin t\cos t} = -\frac{9}{4}\sin t$$

$$\overset{\circ}{(y')} = -\frac{9}{4}\sin t$$

$$y'' = \frac{-9\cos t}{4\cdot 4\sin t\cos t} = -\frac{9}{16\sin t}$$

Funktsiooni $y = f(x)$ esimest järku diferentsiaal on $dy = y'(x)dx = y'(x) \cdot \Delta x$
Teist järku diferentsiaali saame võttes esimese diferentsiaali diferentsi
$d^2 y = d(dy) = (dy)' dx$
$(dy)' = (y'(x) \cdot \Delta x)' = \Delta x \cdot y'' = y''(x)dx$
Seega
(12.7) $d^2 y = y''(x)dx^2$
Jätkates seda protsessi on
(12.7) $d^n y = y^{(n)}(x)dx^n \qquad n = 1,2...$
Valemist (12.7) järeldub, et funktsiooni kõrgemat järku tuletise võib esitada kujul
(12.8) $y^{(n)}(x) = \dfrac{d^n y}{dx^n} \qquad n = 1,2...$

Olgu antud liitfunktsioon $y = f[u(x)]$

$$dy = \left(f[u(x)]\right)' dx = f_u' u' dx$$
$$f_u' u' = \frac{df}{dx}$$
$$u' dx = du$$
$$f_u' = \frac{df}{du}$$

$dy = \dfrac{df}{dx} dx$
$dy = \dfrac{df}{du} du$

Seda omadust nimetatakse diferentsiaali invariantsuseks.

Sellest, kas me kirjutame ta sõltumatu muutuja x suhtes või sõltuva muutuja u suhtes…

Funktsiooni kasvamine ja kahanemine. Rolle'i teoreem (tõestusega).

Definitsioon 1 Vaatleme funktsiooni $y = f(x)$ vahemikus (a,b)

Olgu $x_1 < x_2$, $x_1, x_2 \in (a,b)$

1) kui $f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow f(x)$ on **kasvav**;
2) kui $f(x_1) \le f(x_2) \Rightarrow f(x)$ on mittekahanev;
3) kui $f(x_1) > f(x_2) \Rightarrow f(x)$ on **kahanev**;
4) kui $f(x_1) \ge f(x_2) \Rightarrow f(x)$ on mittekasvav.

Olgu $f(x)$ kasvav vahemikus (a,b)

Sel juhul $\left.\begin{array}{l}\Delta x = x_2 - x_1 \\ \Delta y = f(x_2) - f(x_1)\end{array}\right\}$ on sama märgiga

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} > 0 \Rightarrow \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y' \ge 0$$

Funktsioon on kasvav $\Rightarrow y'(x) \ge 0$

Kui $y'(x) > 0 \Rightarrow$ funktsioon on kasvav

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} > 0$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = y'(x) + \alpha(\Delta x) > 0,$$ kui Δx on piisavalt väike.

Funktsioon on mittekahanev $\Leftrightarrow$ $y'(x) \ge 0$

Analoogselt

Funktsioon on kahanev $\Rightarrow$ $y'(x) \le 0$

Kui $y'(x) < 0 \Rightarrow$ funktsioon on kahanev

Funktsioon on mittekasvav $\Leftrightarrow y'(x) \le 0$

Teoreem 1 (Rolle'i teoreem)

Olgu täidetud järgmised tingimused:

1) funktsioon $f(x)$ on pidev lõigul $[a,b]$
2) funktsioon $f(x)$ on diferentseeruv vahemikus (a,b)
3) $f(a) = f(b) = 0$

Siis leidub vähemalt üks selline punkt $c \in (a,b)$, et

(13.1) $f'(c) = 0$

Tõestus: Sellest, et funktsioon on pidev lõigul järeldub, et leiduvad niisugused punktid, kus ta saavutab oma vähima vääruse m ja suurima väärtuse M sellel lõigul.

1) Kui $m = M = 0 \Rightarrow f(x) = 0$

Kuid konstandi tuletis on null

$f'(x) = 0 \quad x \in (a,b)$

2) Olgu $M \ne 0$ ja olgu $f(c) = M$

Eksisteerib $y'(c)$, mis ei saa olla positiivne ega negatiivne. Vastasel juhul funktsioon oleks kasvav või kahanev punkti c ümbruses. Mõlemal juhul peab funktsioon omandama punkti c läheduses väärtuseid, mis on suurem kui M. See aga on võimatu.

Järelikult $f'(c) = 0$

m.o.t.t.

Järeldus: Kui funktsiooni rahuldab teoreemi (1) kahte esimest punkti ja $f(a) \neq f(b) \neq 0$

Ka siis eksisteerib $c \in (a,b)$

$$f'(c) = 0$$

Tõepoolest, võtame

$$g(x) = f(x) - f(a)$$

Kõik kolm teoreemi tingimust on täidetud ja järelikult $g'(c) = 0, \ c \in (a,b)$

Kuid $g'(x) = f'(x) \Rightarrow f'(c) = 0$

Lagrange'i ja Cauchy teoreem (tõestusega).

Teoreem 1 – Lagrange'i teoreem
Olgu täidetud tingimused:

1) funktsioon $f(x)$ on pidev lõigul $[a,b]$
2) funktsioon $f(x)$ on diferentseeruv vahemikus (a,b)

Siis leidub vähemalt üks selline punkt $c \in (a,b)$, et
(14.1) $f(b)-f(a)=f'(c)\cdot(b-a)$ Lagrange'i või lõpliku muudu valem

Tõestus: Vaatleme järgmist funktsiooni
$F(x)=\big(f(x)-f(a)\big)(b-a)-\big(f(b)-f(a)\big)(x-a)$
See funktsioon on

1) pidev lõigul $[a,b]$
2) diferentseeruv vahemikus (a,b)
   $F'(x)=f'(x)(b-a)-\big(f(b)-f(a)\big)$
3) $F(a)=F(b)=0$
   $F(a)=\big(f(a)-f(a)\big)(b-a)-\big(f(b)-f(a)\big)(a-a)=0$

Vastavalt Rolle'i teoreemile eksisteerib niisugune $c \in (a,b)$, et $F'(c)=0$
$F'(c)=f'(c)(b-a)-\big(f(b)-f(a)\big)=0$
Siit saamegi valemi (13.1)
m.o.t.t.

Teoreem 2 – Cauchy teoreem
Olgu kaks funktsiooni $f(x)$ ja $g(x)$, mis rahuldavad tingimusi:

1) nad on pidevad lõigul $[a,b]$
2) nad on diferentseeruvad vahemikus (a,b)
3) $g(a)-g(b)\neq 0$
4) $f(x)$ ja $g(x)$ ei muutu üheaegselt nulliks vahemikus (a,b)

Siis leidub vähemalt üks niisugune punkt $c \in (a,b)$, et
(14.2) $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$ Cauchy valem

Tõestus: Vaatleme funktsiooni
$G(x)=\big(f(x)-f(a)\big)\big(g(b)-g(a)\big)-\big(f(b)-f(a)\big)\big(g(x)-g(a)\big)$
Sellel funktsioonil on järgmised omadused:

1) ta on pidev lõigul $[a,b]$;
2) ta on diferentseeruv vahemikus (a,b);
   $G'(x)=f'(x)\big(g(b)-g(a)\big)-\big(f(b)-f(a)\big)g'(x)$
3) $G(a)=G(b)=0$

Vastavalt Rolle'i teoreemile leidub vähemalt üks niisugune punkt $c \in (a,b)$, et $G'(c)=0$
$G'(c)=f'(c)\big(g(b)-g(a)\big)-\big(f(b)-f(a)\big)g'(c)=0$
$f'(c)\big(g(b)-g(a)\big)=\big(f(b)-f(a)\big)g'(c)$
$g'(c)\neq 0$, sest kui $g'(c)=0$, siis järeldub võrdusest, et $f'(c)=0$, mis on vastuolus eeldusega.

Jagades võrduse mõlemad pooled $g'(c)$ -ga ja $\left(g(b)-g(a)\right)$-ga saamegi Cauchy valemi.

m.o.t.t.

Märkus: Lagrange'i valem on Cauchy valemi järelduseks, kui $g(x)=x$

Tõepoolest $g(a)-g(b)=a-b$

$g'(c)=1$

$$\frac{f(a)-f(b)}{a-b}=\frac{f(c)}{1}\Big|\cdot(a-b)$$ Saame Lagrange'i valemi.

Ka Lagrange'i valemit saan geomeetriliselt tõlgendada.

$f(b)-f(a)=(b-a)\tan\alpha$

L'Hospitali reegel (tõestusega kui $x \to a,$).

Teoreem 1 Olgu antud piirväärtus $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$, milles on määramatus $\frac{0}{0}$ või $\frac{\infty}{\infty}$

Kui eksisteerib funktsioonide tuletiste suhte piirväärtus, siis eksisteerib ka esialgne piirväärtus ja $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ – L'Hospitali reegel

<u>*Tõestus*</u>:

1) Olgu määramatus $\frac{0}{0}$ ja a - lõplik.

   Eeldame, et punkti a teatud ümbruses on täidetud Cauchy reegli tingimused.

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)},\ \text{kus}\ c\in(a,x)$$

$$f(a)=g(a)=0$$

   Kui $x\to a,$ siis ka $c\to a$

   Kui eksisteerib piirväärtus $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$, siis eksisteerib ka $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ ja nad on võrdsed.

2) Olgu määramatus $\frac{0}{0}$ ja a - lõpmatu.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}$$

   Vaatleme piirväärtust $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(\frac{1}{x})}{g(\frac{1}{x})}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\left(f(\frac{1}{x})\right)'}{\left(g(\frac{1}{x})\right)'}$

$$\left(f(\tfrac{1}{x})\right)'=f'(\tfrac{1}{x})(-\tfrac{1}{x^2})$$

$$\left(g(\tfrac{1}{x})\right)'=g'(\tfrac{1}{x})(-\tfrac{1}{x^2})$$

   Seega $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\left(f(\frac{1}{x})\right)'}{\left(g(\frac{1}{x})\right)'}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f'(\frac{1}{x})(-\frac{1}{x^2})}{g'(\frac{1}{x})(-\frac{1}{x^2})}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$

3) Olgu määrmatus $\frac{\infty}{\infty}$ ja a -lõplik.

   Olgu lõigul $[x_0,x]$ täidetud Cauchy teoreemi tingimused.

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}=\frac{f(x)}{g(x)}\cdot\frac{1-\frac{f(x_0)}{f(x)}}{1-\frac{g(x_0)}{g(x)}}=\frac{f'(c)}{g'(c)}\qquad c\in(x_0,x)$$

   $x_0\to a,$ siis ka $c\to a$

   $x\to a\Rightarrow f(x)\to\infty,\quad g(x)\to\infty$

$$\frac{f(x_0)}{f(x)}\xrightarrow{x\to a}0$$

$$\frac{g(x_0)}{g(x)} \xrightarrow{x \to a} 0$$

Suhte $\frac{f(x)}{g(x)}$ kordaja läheneb järelikult ühele, kui $x \to a$

Ja seega $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

Näited:

1) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x (x - \sin x)}{x^3 \cos x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{6x} = \frac{1}{6}$

2) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x + 2}{\ln x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{\frac{1}{x}} = \infty$

3) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{x \cdot x \sin \frac{1}{x}}{\sin x} = 0$

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{2x \cdot \sin \frac{1}{x} + x^2 \sin \frac{1}{x} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)}{\cos x}$ Tuletise suhte piirväärtus ei eksisteeri, seega L'Hospitali reegel ei ole rahuldatud.

4) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{e^{-2x} (\cos x + 2 \sin x)}{e^{-x} (\cos x + \sin x)} = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{1 + 2 \tan x}{e^x (1 + \tan x)}$ (ei eksisteeri)

Lugeja nullkohad $\tan x = -\frac{1}{2}$, nimetaja nullkohad $\tan x = -1$

$\left[e^{-2x} (\cos x + 2 \sin x\right]' = e^{-2x}.(-2)(\cos x + 2 \sin x) + e^{-2x} (-\sin x + 2 \cos x) = -5 \sin x \cdot e^{-2x}$

$\left[e^{-x} (\cos x + \sin x\right]' = -2 \sin x \cdot e^{-x}$

$\lim\limits_{x \to \infty} \frac{-5 \sin x \cdot e^{-2x}}{-2 \sin x \cdot e^{-x}} = \frac{5}{2e^x} = 0$ Lugeja ja nimetaja tuletised on üheaegselt nullid, kui $\sin x = 0$, $x = n\pi$. Seega on Cauchy valemi tingimused rikutud, see valem ei kehti, aga siis ei kehti ka L'Hospitali reegel.

Taylori valem. Teoreem jääkliikmest (tõestusega). Teoreem valemi ühesusest (tõestusega).

Definitsioon 1 Taylori valemiks nimetatakse valemit, mis avaldab funktsiooni väärtuse argumendi muudu astmetena.

(16.1) $f(a+h) = f(a) + \dfrac{f'(a)}{1!}h + \dfrac{f''(a)}{2!}h^2 + \ldots + \dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n + R_n(h)$

$R_n(h)$ on valemi jääkliige $\quad R_n(h) = \dfrac{h^{n+1}}{(n+1)!}M$

Valem (23.1) on kirjutatud nii, et $f(a+h)$ ja selle n esimest tuletist on võrdsed $f(a),\ f'(a),\ldots,f^{(n)}(a)$, kui võtta $h=0$

$$f'(a+h) = \frac{df(a+h)}{dh} = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}h + \frac{f''(a)}{2!}2h + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}nh^{n-1} + \frac{(n+1)h^n}{(n+1)!}M =$$

$$= f(a) + \frac{f'(a)}{1!}h + \frac{f''(a)}{2!}2h + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{(n-1)!}h^{n-1} + \frac{h^n}{n!}M$$

$\lim\limits_{h\to 0} f'(a+h) = f'(a)$

Teoreem 1 Olgu funktsioonil $y = f(x)$ tuletised kuni $(n+1)$ järguni kohal a. Kusjuures $f^{(n+1)}(a)$ võib olla nii lõplik kui lõpmatu. Sel juhul

(16.2) $\lim\limits_{h\to 0} M = f^{(n+1)}(a)$

Tõestus:

1) Olgu $f^{(n+1)}(a)$ lõplik.

$$\phi(h) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}h + \frac{f''(a)}{2!}h^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}\left[f^{(n+1)}(a) + \varepsilon\right] - f(a+h)$$

$$\phi(0) = f'(0) = \ldots = f^{(n)}(0) = 0$$

$$\phi^{(n)}(h) = f^{(n)}(a) + h\left[f^{(n+1)}(a) + \varepsilon\right] - f^{(n)}(a+h)$$

$$\phi^{(n+1)}(h) = f^{(n+1)}(a) + \varepsilon - f^{(n+1)}(a+h)$$

$\phi^{(n+1)}(0) = \varepsilon > 0 \Rightarrow \phi^{(n)}(h)$ on kasvav $\Rightarrow f^{(n)}(0) = 0 \Rightarrow f^{(n)}(h) > 0,$ kui $h > 0$

Järelikult $\phi^{(n-1)}(h)$ on kasvav ja et $\phi^{(n-1)}(0) = 0,$ siis $\phi^{(n-1)}(h) > 0,$ kui $h > 0$ jne.

Lõpus $\phi(h)$ on kasvav ja $\phi(h) > 0,$ kui $h > 0$

$$\phi(h) > 0 \Rightarrow \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}\left[f^{(n+1)}(a) + \varepsilon - M\right] > 0$$

$$f^{(n+1)}(a) + \varepsilon - M > 0 \qquad M < f^{(n+1)}(a) + \varepsilon$$

Samamoodi saame tõestada, et $M > f^{(n+1)}(a) - \varepsilon$

Järelikult $\left|M - f^{(n+1)}(a)\right| < \varepsilon \to 0$

m.o.t.t.

2) Olgu $f^{(n+1)}(a) = -\infty$

$$\phi(h) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}h + \frac{f''(a)}{2!}h^2 + ... + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}A - f(a+h)$$

$A > 0$

$\phi(0) = \phi'(0) = ... = \phi^{(n)}(0)$

$\phi^{(n+1)}(h) = A - f^{(n+1)}(a+h)$ $\quad\quad$ $\phi^{(n+1)}(h) > 0,$ kui h on võimalikult väike.

Nii nagu esimese punktis, saame $\phi(h) > 0$

$$\frac{h^{n+1}}{(n+1)!}\left[A - M\right] > 0$$

$M < A < 0$

Järelikult $\lim\limits_{h \to 0} M = -\infty$

m.o.t.t.

Teoreem 2 Olgu funktsioonil $y = f(x)$ kõik tuletised kuni $(n+1)$ järguni lõplikud punktis a. Sel juhul on Taylori valemi kordajad üheselt määratud.

Tõestus:

Olgu funktsiooni $y = f(x)$ kaks erinevat Taylori valemit

$$f(a+h) = a_1 + a_2 h + ... + a_{n+1}h^n + mh^{n+1}$$

$$f(a+h) = A_1 + A_2 h + ... + A_{n+1}h^n + Mh^{n+1}$$

Võtame $h = 0,$ siis saame $f(a) = a_1 = A_1$

$$a_2 h + ... + a_{n+1}h^n + mh^{n+1}$$

$$A_2 h + ... + A_{n+1}h^n + Mh^{n+1}$$

Jagame mõlemad avaldised h-ga ja võtame $h = 0,$ siis saame $a_2 = A_2$

Jätkates seda protsessi saame, et $a_3 = A_3, ..., a_{n+1} = A_{n+1}, m = M$

m.o.t.t.

Taylori valemi jääkliige Lagrange'i ja Cauchy kujul.

Vaatleme Taylori valemit

$$f(a+h)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}h+\frac{f''(a)}{2!}h^2+...+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n+\frac{h^{n+1}}{(n+1)!}M$$

Kirjutame jääkliikme kujule

$$R_n(h)=\frac{h^{n+1}}{(n+1)!}M=h^pP,\ \text{kus}\ p\geq n+1$$

Olgu $a+h=b,\qquad a\to x\qquad h=b-a=b-x$

Me saame

$$g(x)=f(x)+\frac{f'(x)}{1!}(b-x)+\frac{f''(x)}{2!}(b-x)^2+...+\frac{f^{(n)}(x)}{n!}(b-x)^n+(b-x)^pP$$

$$g(b)=f(b)$$

$$g(a)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}h+\frac{f''(a)}{2!}h^2+...+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n+h^pP=f(a+h)=f(b)$$

1) $g(a)=g(b)$
2) $g(x)$ on pidev lõigul $[a,b]$
3) $g'(x)$ on diferentseeruv vahemikus (a,b)

$$g'(x)=f'(x)+\frac{f'(x)}{1!}(b-x)-\frac{f'(x)}{1!}+\frac{f^{(n+1)}(x)}{n!}(b-x)^n-\frac{f^{(n)}(x)n}{n!}+p(b-x)^{p-1}(-1)P$$

$$g'(x)=\frac{f^{(n+1)}(x)}{n!}(b-x)^n-p(b-x)^{p-1}P$$

Vastavalt Rolle´i teoreemile leidub niisugune $c\in(a,b)$, et $g'(c)=0$

$$\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(b-c)^n-p(b-c)^{p-1}P=0$$

Seega $P=\dfrac{f^{(n+1)}(c)(b-c)^{n-p+1}}{n!\,p(b-c)^{p-1}}$

$$b-a=h\qquad c=a+\vartheta h,\qquad 0<\vartheta<1$$

$$b-c=a+h-a+\vartheta h=h(1-\vartheta)$$

$$P=\frac{f^{(n+1)}(a+\vartheta h)h^{n-p+1}(1-\vartheta)^{n-p+1}}{n!\,p}$$

Siit saame $R_n(h)=\dfrac{h^{n+1}(1-\vartheta)^{n-p+1}}{p-n!}f^{(n+1)}(a+\vartheta h)$

Kui võtame $p=n+1$, siis saame $R_n(h)=\dfrac{h^{n+1}}{(n+1)!\,n!}f^{(n+1)}(a+\vartheta h)$

(18.1) $R_n(h)=\dfrac{h^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\bar{x})$

$\bar{x}=a+\vartheta h\in(a,a+h)$ **Lagrange´i kuju**

Võtame $p = 1$, siis saame **Cauchy kuju**

(18.2) $R_n(h) = \dfrac{h^{n+1}(1-\vartheta)^n}{n!} f^{(n+1)}(a + \vartheta h)$

(18.3) $f(x) = f(x_0) + \dfrac{f'(x_0)}{1!}\Delta x + \dfrac{f''(x_0)}{2!}\Delta x^2 + \ldots + \dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\Delta x^n + R_n(x)$

(18.4) $R_n(x) = \dfrac{\Delta x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\bar{x}) = \dfrac{\Delta x^{n+1}(1-\vartheta)^n}{n!} f^{(n+1)}(\bar{x})$

$$\bar{x} = x_0 + \vartheta \Delta x$$
$$0 < \vartheta < 1$$

Maclaurini valem. Funktsioonide e^x, sin x, cos x, ln(1+x) ja $(1+x)^a$ valemid (tõestusega).

Kui Taylori valemis (24.4) võtta $x_0 = 0,$ siis saame Maclaurini valemi.

(18.1) $f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + ... + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_n(x)$

(18.2) $R_n(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\vartheta x)$ Lagrange'i kuju

$R_n(x) = \frac{x^{n+1}(1-\vartheta)^n}{n!}f^{(n+1)}(\vartheta x)$ Cauchy kuju

1. $y = e^x$ $y = y' = y'' = ... = y^{(n)}(x) = e^x$

$y(0) = y'(0) = ... = y^{(n)}(0) = 1$

(18.3) $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!} + R_n(x)$

$R_n(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\vartheta x}$

Näitame, et $n!$ kasvab kiiremini, mistahes astmest.
Vaatleme,

$(n!)^2 = n! n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 ... (n-1) \cdot n$

$p(n+1-p) = p(n-p) + p > n - p + p = n$

Seega,

$(n!)^n > n \cdot n ... n = n^n \quad n > 2$

$n! > \sqrt{n^n} = n^{\frac{n}{2}} > a^n$ suurte n korral

Järelikult,

$\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \xrightarrow{n \to \infty} 0$ mistahes x-i korral

Ja siit saame $R_n(x) \xrightarrow{n \to \infty} 0$

$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + ... + \frac{1}{n!} + R_n(1)$

$R_n(1) = \frac{1}{(n+1)!}e^{\vartheta}, \quad 0 < \vartheta < 1$

$n!e = N + \frac{e^{\vartheta}}{n+1}$

Kui e oleks ratsionaalne $e = \frac{p}{q}$, siis $n!e$ oleks täisarv, kui $n > q$

Paremal pool $e^{\vartheta} < 3$ ja $\frac{e^{\vartheta}}{n+1}$ on alati murdarv. See vastuolu näitabki, et $n+1$ ei saa olla.

2. $y = \sin x$

$$y^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right) = \sin x \cdot \cos n\frac{\pi}{2} + \sin n\frac{\pi}{2} \cdot \cos x$$

Kui võtta funktsioon ja tema tuletised kohal 0, siis saame neli erinevat väärtust ($0,\ 1,\ 0,\ -1$), mis hakkavad perioodiliselt korduma.

(18.4) $$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + ... + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + R_{2n+1}(x)$$

$$R_{2n+1}(x) = \frac{x^{2n+3}}{(2n+3)!} \sin\left(\vartheta x + (2n+3)\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\left|R_{2n+1}(x)\right| \le \frac{\left|x^{2n+3}\right|}{(2n+3)!} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

3. $y = \cos x$

$$y^{(n)}(x) = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$$

Punktis 0 saame neli väärtust ($1,\ 0,\ -1,\ 0$), mis hakkavad perioodiliselt korduma.

(18.5) $$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + ... + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + R_{2n}(x)$$

$$R_{2n}(x) = \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} \cos\left(\vartheta x + 2(n+1)\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\left|R_{2n}(x)\right| \le \frac{\left|x^{2n+2}\right|}{(2n+2)!} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

4. $y = \ln(1+x)$ $\qquad y(0) = 0$

$y' = (1+x)^{-1}$ $\qquad y'(0) = 1$

$y'' = -(1+x)^{-2}$ $\qquad y''(0) = -1$

$y''' = 2(1+x)^{-3}$ $\qquad y'''(x) = 2$

$y^{(n)} = (-1)^{n+1}(n-1)!(1+x)^{-n}$ $\qquad y^{(n)}(0) = (-1)^{n+1}(n-1)!$

(18.6) $$\ln(x) = x - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3} + ... + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + R_n(x)$$

$$R_n(x) = (-1)^n \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} n!(1+\vartheta x)^{-(n+1)} = \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1}\left(\frac{1}{1+\vartheta x}\right)^{n+1}$$ Lagrange´i kuju

$$R_n(x) = (-1)^n \frac{x^{n+1}(1-\vartheta)^n}{n!} n!(1+\vartheta x)^{-(n+1)} = \frac{(-1)^n x^{n+1}}{1+\vartheta x}\left(\frac{1-\vartheta}{1+\vartheta x}\right)^n$$ Cauchy kuju

$\ln x$ on määratud, kui $x > -1$

Kui $0 < x < 1$, siis $x^{n+1} \xrightarrow{n\to\infty} 0$, $\left(\frac{1}{1+\vartheta x}\right)^{n+1} \xrightarrow{n\to\infty} 0$

$R_n(x) \xrightarrow{n\to\infty} 0$, kui $0 < x < 1$

Olgu $-1 < x < 0$, siis $\left|x^{n+1}\right| = |x|^{n+1} \xrightarrow{n\to\infty} 0$

$$\frac{1-\vartheta}{1+\vartheta x} = \frac{1-\vartheta}{1-r\vartheta} < 1 \qquad r = -x \qquad |r| < 1 \qquad |r\vartheta| < |\vartheta|$$

$$\left(\frac{1-\vartheta}{1+\vartheta x}\right)^n \xrightarrow{n\to\infty} 0, \ -1 < x < 0$$

Seega võib valemit (18.6) ligikaudseteks arvutusteks kasutada, kui $|x| < 1$ ehk $-1 < x < 1$

5. $y = (1+x)^\alpha \quad \alpha \in R \qquad y(0) = 1$

$y' = \alpha(1+x)^{\alpha-1} \qquad y'(0) = \alpha$

$y'' = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2} \qquad y''(0) = \alpha(\alpha-1)$

$y''' = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(1+x)^{\alpha-3} \qquad y'''(0) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)$

$y^{(n)} = \alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n} \qquad y^{(n)}(0) = \alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)$

(18.7) $$(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + ... + \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!}x^n + R_n(x)$$

$$R_n(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n)(1+\vartheta x)^{\alpha-n-1}$$

Kui $|x| < 1$ ehk $-1 < x < 1$, siis $R_n(x) \xrightarrow{n\to\infty} 0$

Kui $0 < x < 1$ $R_n(x) = \dfrac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n)}{(n+1)!} \cdot \dfrac{x^{n+1}}{(1+\vartheta x)^{n+1-\alpha}}$

n kasvades R_n kordaja M muudab teguriga $\dfrac{\alpha-n-1}{n+2}$ korrutades.

$$\left|\frac{\alpha-n-1}{n+2}\right| = \frac{n+1-\alpha}{n+2} = \frac{n+2-1-\alpha}{n+2} = 1 - \frac{1+\alpha}{n+2} > 1$$

Seega $M \xrightarrow{n\to\infty} 0$

Ka valemit (18.7) võib rakendada vahemikus $-1 < x < 1$

Ekstreemumid. Ekstreemumi tarvilik tingimus (tõestusega). Kriitilised punktid.

Definitsioon 1 Ekstreemumiteks nimetatakse funktsiooni maksimume ja miinimume. Punktis x_1 on funktsiooni $y = f(x)$ miinimum, kui leidub niisugune punkti x_1 ümbrus $U_\varepsilon(x_1)$, et
$f(x) > f(x_1)$, kui $x \in U_\varepsilon(x_1)$, $x \neq x_1$
(19.1) $U_\varepsilon(x_1) = \{x \| x - x_1| < \varepsilon\}$
Punktis x_2 on funktsiooni $y = f(x)$ maksimum, kui leidub niisugune punkti x_2 ümbrus $U_\delta(x_2)$, et
$f(x) < f(x_2)$, kui $x \in U_\delta(x_2)$, $x \neq x_2$
(19.2) $U_\delta(x_2) = \{x \| x - x_2| < \delta\}$
Miinimume ja maksimume nimetatakse täpsemalt lokaalseteks ekstreemumiteks.

Definitsioon 2 Funktsiooni $y = f(x)$ suurimat või vähimat väärtust mingil lõigul $[a, b]$ nimetatakse selle funktsiooni globaalseks ekstreemumiks.

Teoreem 1 (ekstreemumi tarvilik tingimus) Funktsioonil $y = f(x)$ saavad olla ekstreemumid vaid nendes punktides, kus $f'(x) = 0$ või ei eksisteeri üldse.

Tõestus: Oletame, et punktis x_1 tuletis eksisteerib ja $f'(x_1) \neq 0$
Olgu $f'(x_1) > 0$, siis $f'(x) > 0$ ka punkti x_1 ümbruses.
Seega $y = f(x)$ on selles ümbruses.

Järelikult $x < x_1 \Rightarrow f(x) < f(x_1)$
$x > x_1 \Rightarrow f(x) > f(x_1)$
See tähendab, et (26.1), (26.2) ei ole täidetud ja x_1 ei saa olla ekstreemum.
Analoogselt, kui $y'(x_2) < 0 \Rightarrow y = f(x)$ kahanev ja x_2 ei ole ekstreemum.
Seega tõepoolest, ekstreemum punktis peab olema $y'(x) = 0$ või ei eksisteeri üldse.

Definitsioon 3 Punkte, kus $y'(x) = 0$ või ei eksisteeri nimetatakse **kriitilisteks punktideks** või statsionaarseteks punktideks.

Ekstreemumi piisavad tingimused (tõestusega).

Teoreem 1 (ekstreemumi piisavad tingimused I)
Olgu x_1 funktsiooni $y = f(x)$ kriitiline punkt. Kui läbides seda punkti x kasvamise suunas tuletise $y'(x)$ märk:

1) $- \rightarrow + \Rightarrow x_1$ on minimaalne;
2) $+ \rightarrow - \Rightarrow x_1$ on maksimaalne;
3) märk ei muutu $\Rightarrow x_1$ ei ole ekstreemum.

Tõestus: Olgu tuletise märgi muutus $- \rightarrow +$
$x < x_1$, siis $y'(x) < 0 \Rightarrow y = f(x)$ on kahanev $\Rightarrow f(x) > f(x_1)$, kui $x < x_1$
$x > x_1$, siis $y'(x) > 0 \Rightarrow y = f(x)$ on kasvav $\Rightarrow f(x) > f(x_1)$, kui $x > x_1$
Järelikult leidub niisugune ümbrus $U_\varepsilon(x_1)$, et $f(x) > f(x_1)$, $x \in U_\varepsilon(x_1)$
$x \neq x_1$
Seega x_1 on miinimum.
Analoogselt tõestatakse (2) ja (3)
m.o.t.t.

Teoreem 2 (ekstreemumi piisavad tingimused II)
Olgu x_1 kriitiline punkt, milles $y'(x_1) = y''(x_1) = ... = y^{(n-1)}(x_1) = 0$, $y^{(n)}(x_1) \neq 0$
$n \geq 1$
Siis on järgmised võimalused:

1) n on paarisarv $\Rightarrow x_1$ on ekstreemum;
   $y^{(n)}(x_1) < 0 \Rightarrow x_1$ on max
   $y^{(n)}(x_1) > 0 \Rightarrow x_1$ on min
2) n on paarituarv $\Rightarrow x_1$ ei ole ekstreemum.

Tõestus: Kirjutame funktsiooni $y = f(x)$ Taylori valemi punktis x_1

$$f(x) = f(x_1) + \frac{f'(x_1)}{1!}\Delta x + ... + \frac{f^{(n-1)}(x_1)}{(n-1)!}\Delta x^{n-1} + R_{n-1}(x)$$

Vastavalt teoreemi eeldusele saame,

$$f(x) = f(x_1) + \frac{\Delta x^n}{n!} f^{(n)}(\overline{x}), \quad \overline{x} \in (x, x_1)$$

$$f(x) - f(x_1) = \frac{\Delta x^n}{n!} f^{(n)}(\overline{x})$$

$$\Delta x = x - x_1$$

Kui $n = 2k$ on paarisarv, siis $\frac{\Delta x^n}{n!} = \frac{\Delta x^{2k}}{n!} > 0$, kui $x \neq x_1$
Eeldame, et $f^{(n)}(x)$ on pidev punkti x_1 ümbruses, siis $y^{(n)}(x_1) > 0 \Rightarrow y^{(n)}(\overline{x}) > 0$, $\overline{x} \in (x, x_1)$
Siis saame $f(x) - f(x_1) > 0$

$f(x) > f(x_1)$ x_1 ümbruses

Seega x_1 on miinimum.

Analoogselt saame, et $f^{(n)}(x_1) < 0$, siis x_1 on max.

Kui n on paaritu, siis $\frac{\Delta x^n}{n!} > 0$, kui $\Delta x > 0$, $x > x_1$

$\frac{\Delta x^n}{n!} < 0$, kui $\Delta x < 0$, $x < x_1$

Järelikult on ühel pool punktist x_1 $f(x)$ suurem kui $f(x_1)$ ja teisel pool väiksem. See tähendab, et x_1 ei ole ekstreemum.

m.o.t.t.

Funktsiooni $y = f(x)$ globaalsed ekstreemumid:

1) lokaalsed ekstreemumid $x_1, x_2 \ldots$, mis asetsevad lõigul $[a, b]$
2) funktsiooni väärtused lõigu otspunktides $f(a)$, $f(b)$

Kahes eelmises punktis leitud funktsiooni väärtustest leitakse suurim ja vähim.

Funktsiooni kumerus ja nõgusus, käänupunktid. Teoreem kumerus- ja nõgusus-piirkonnast (tõestusega).

Definitsioon 1 Funktsioon $y = f(x)$ on **nõgus** vahemikus (a, b), kui selle funktsiooni graafik asub selles vahemikus kõrgemal temale tõmmatud puutujast.
Funktsioon $y = f(x)$ on **kumer** lõigul (a, b), kui selle funktsiooni graafik asub selles vahemikus allpool temale tõmmatud puutujast.

Definitsioon 2 Punkte, kus funktsioon on määratud ja pidev ja milles funktsiooni kumerus muutub nõgususeks või vastupidi nimetatakse **käänupunktid**eks.

Teoreem 1 Kui funktsioon $y = f(x)$ on kumer mingis vahemikus, siis $y''(x) < 0$ selles vahemikus. Kui funktsioon on nõgus, siis $y''(x) > 0$ selles vahemikus.

<u>*Tõestus*</u>: Olgu $y = f(x)$ kumer vahemikus (a, b)
Puutuja võrrand läbi punkti x_1

$$\overline{y} - y_1 = y'(x_1)(\overline{x} - x_1)$$

$$y_1 = f(x_1),\ \ y'(x_1) = f'(x_1)$$

$$\overline{x} = x,\ \ \overline{y} = y_1 + y'(x_1)(x - x_1)$$

$$\overline{y} - y = \overline{y} - f(x) = y_1 + y'(x_1)(x - x_1) - f(x) = f(x_1) - f(x) + y'(x_1)(x - x_1)$$

Eeldame, et Lagrange'i teoreemi tingimused on täidetud: $f(x)$ on pidev lõigul $[a, b]$ ja diferentseeruv vahemikus (a, b)

Vastavalt Lagrange'i valemile

$$f(x_1) - f(x) = f'(\tilde{x})(x_1 - x) = y'(\tilde{x})(x_1 - x),\ \ \tilde{x} \in (x, x_1)$$

Seega, $\overline{y} - y = y'(\tilde{x})(x_1 - x) + y'(x_1)(x - x_1) = (x - x_1)(y'(x_1) - y'(\tilde{x}))$
Vastavalt Lagrange'i valemile

$$y'(x_1) - y'(\tilde{x}) = y''(\xi)(x_1 - \tilde{x}) \qquad \xi \in (\tilde{x}, x_1)$$

$$\overline{y} - y = (x - x_1)(x_1 - \tilde{x})y''(\xi)$$

Kui $x < x_1$, siis $x_1 - x > 0,\ \ x_1 - \tilde{x} > 0$

Kui $x < x_1$, siis $x_1 - x < 0,\ \ x_1 - \tilde{x} < 0$

Kui funktsioon on kumer, siis puutuja väärtused on suuremad ja $\overline{y} - y \geq 0$
Järelikult $-y''(\xi) > 0$ ehk $y''(\xi) < 0$

$$x \to x_1 \Rightarrow \xi \to x_1$$

Järelikult $y''(x) < 0,\ \ x \in (a, b)$

m.o.t.t.

Asümptoodid. Kaldasümptoodi valemid. Funktsiooni täielik uurimine.

Definitsioon 1 Asümptoodiks nimetatakse sirget, millele funktsioon $y = f(x)$ graafik läheneb kui tahes lähedale (kuid ei puutu) tingimusel, et funktsiooni graafiku argument eemaldub koordinaatide alguspunktist lõpmatu kaugele.

1) Vertikaalsed asümptoodid

Punkti x_0 läbib vertikaalne asümptood $x = x_0$, kui x lähenemisel sellele punktile funktsiooni absoluutväärtus kasvab tõkestamatult.

(22.1) $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} |f(x)| = +\infty$ või $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} |f(x)| = +\infty$

Enamasti on x_0 II liiki katkevuspunkt.

2) **Kaldasümptoodid** $y = kx + b$

Vastavalt asümptoodi definitsioonile $\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x) - y\right) = 0$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{kx+b}{x} = \lim_{x\to\infty}\left(k + \frac{b}{x}\right) = k$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-y}{x} = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{f(x)}{x} - \frac{y}{x}\right) = 0$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{y}{x} = k$$

(22.2) $k = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$

$$b = y - kx \approx f(x) - kx$$

Järelikult,

(22.3) $b = \lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x) - kx\right)$

Funktsiooni täielik uurimine

1. Määramispiirkond.
2. Katkevuspunktid.
3. Paarsus, perioodisus.
4. $y'(x)$ uurimine. Kasvamine, kahanemine, ekstreemumid.
5. $y''(x)$ uurimine. Kumerus, nõgusus, käänupunktid.
6. Asümptoodid.
7. Olulised väärtused (nullkohad, ekstreemumid, käänupunktid)

Algfunktsioon. Määramata integraal ja selle omadused.

Definitsioon 1 Funktsiooni $f(x)$ **algfunktsioon**iks nimetatakse niisugust funktsiooni $F(x)$, mille korral

(1.1) $F'(x) = f(x)$

Definitsioon 2 Funktsiooni $f(x)$ **määramata integraal**iks nimetatakse kõigi tema algfunktsioonide hulka.

Määramata integraali omadused:

1.

(1.2) $\int df(x) = f(x) + C$

Tõepoolest $df = f'(x)dx$

2.

(1.3) $d\left[\int f(x)dx\right] = f(x)dx$

(1.3') $\frac{d}{dx}\left[\int f(x)dx\right] = f(x)$

3. Lineaarsus

(1.4) $\int[\alpha f(x) + \beta g(x)]dx = \alpha\int f(x)dx + \beta\int g(x)dx$

Võttes tuletised saame,

vp$\Rightarrow \alpha f(x) + \beta g(x)$ ja pp$\Rightarrow \alpha f(x) + \beta g(x)$

Tuletise võrdusest järeldub, et avaldised ei saa erineda rohkem kui konstandi poolest.

Integraalarvutuse põhiteoreem (tõestusega).

Teoreem 1 (integraalarvutuse põhiteoreem) Ühe ja sama funktsiooni kaks algfunktsiooni võivad erineda ainult konstandi poolest.

Tõestus: Olgu funktsiooni $f(x)$ kaks algfunktsiooni $F(x)$ ja $G(x)$
Vaatleme funktsiooni $h(x) = F(x) - G(x)$
Me näeme, et $h'(x) = F'(x) - G'(x) = f(x) - f(x) = 0$
Kasutades Lagrange'i valemit saame,

$$h(x) - h(x_0) = h'(\overline{x})(x - x_0) = 0$$

Siit järeldubki, et $h(x) = h(x_0) = C_1 \Rightarrow F(x) - G(x) = C_1$

m.o.t.t.

Järeldus: Funktsiooni $f(x)$ kõik algfunktsioonid võib esitada kujul

(1.1) $F(x) + C$

Funktsiooni $f(x)$ määramata integraal

(1.2) $\int f(x)dx = F(x) + C,$ kus C on määramata konstant

Ositi integreerimine ja muutuja vahetus (tõestusega).

Olgu $f(t)$ pidev funktsioon, $t = u(x)$ - pidev ja diferentseeruv, siis kehtib valem

(25.1) $\int f[u(x)] \cdot u'(x)dx = \int f(t)dt,$ kus $t = u(x)$

Tõestus: diferentseerime võrduse mõlemat poolt

$$\frac{d}{dx}\left[\int f[u(x)] \cdot u'(x)dx\right] = f[u(x)] \cdot u'(x)$$

$$\frac{d}{dx}\left[\int f(t)dt\right] = \frac{d}{dt}\left[\int f(t)dt\right]\frac{dt}{dx} = f(t) \cdot u'(x)$$

Tuletised on võrdsed. Seega on võrdsed ka integraalid valemis (3.1)

Olgu $f[u(x)] = \frac{1}{u(x)}$, siis saame $\int \frac{1}{u(x)}u'(x)dx = \int \frac{1}{t}dt = \ln|t| + C = \ln|u(x)| + C$

(25.2) $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)| + C$

Olgu $u(x) = ax + b,$ siis $(ax+b)' = a$

$$\int f(ax+b) \cdot adx = \int f(t)dt = F(t) + C = F(ax+b) + C$$

$$a\int f(ax+b)dx = F(ax+b) + C$$

(3.3) $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C$

Korrutise tuletise reegel annab $(uv)' = u'v + uv'$

Siit $uv' = (uv)' - u'v$

Integreerime võrduse mõlemad pooled

$\int uv'dx = \int [(uv)' - u'v]dx = \int (uv)'dx - \int u'vdx = uv - \int u'vdx$

(3.4) $\int uv'dx = uv - \int u'vdx$

Ratsionaalfunktsioonide integreerimine.

Me vaatleme integraale

(26.1) $\int R(x)dx = \int \frac{P_m(x)}{Q_n(x)}dx$

$P_m(x)$ - m astme polünoom

$Q_n(x)$ - n astme polünoom

Kui lugeja aste on suurem või võrdne nimetaja astmest $(m \geq 2)$

Siis avaldise täisosa ja murdosa

(26.2) $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = T_{m-n}(x) + \frac{S_k(x)}{Q_n(x)}$

Murdosa lahutame osamurdudeks. Selleks tegurdame nimetaja $Q_n(x)$

(26.3) $Q_n(x) = q_o(x-\alpha_1)^{k_1}...(x-\alpha_r)^{k_r}(x^2+p_1x+q_1)^{l_1}...(x^2+p_sx+q_s)^{l_s}$

$k_1 + k_2 + ... + k_r + 2l_1 + ... + 2l_s = r$

(26.4) $\frac{S(x)}{Q_n(x)} = \frac{S(x)}{q_0(x-\alpha_1)^{k_1}...(x-\alpha_n)^{k_n}(x^2+p_1x+q_1)^{l_1}...(x^2+p_sx+q_s)^{l_s}} =$

$$\frac{A_{11}}{x-\alpha_1} + \frac{A_{12}}{(x-\alpha_1)^2} + ... + \frac{A_{1k_1}}{(x-\alpha_1)^{k_1}} + ... + \frac{A_{r1}}{(x-\alpha_r)^{k_r}} + ... + \frac{A_{rk_r}}{(x-a_r)^{k_r}} + ...$$

$$... + \frac{B_{11}x + C_{11}}{x^2+p_1x+q_1} + ... + \frac{B_{1l_1}x + C_{1l_1}}{\left(x^2+p_1x+q_1\right)^{l_1}} + ... + \frac{B_{sl_s}x + C_{sl_s}}{\left(x^2+p_sx+q_s\right)^{l_s}}$$

Viies osamurdude summa ühisele nimetajale ja võrdsustades saadud lugeja $\frac{1}{q_0}S(x)$-ga. Saame leida tundmatud kordajad A, B, C

I liiki osamurru integraal

(26.5) $\int \frac{A}{(x-\alpha)^k}dx = \begin{cases} A\ln|x-\alpha|, & kui\ k=1 \\ A\frac{(x-\alpha)^{1-k}}{1-k}, & kui\ k>1 \end{cases}$

II liiki osamurru integreerimine

$\int \frac{Bx+C}{x^2+px+c}dx \qquad \left(x^2+px+q\right)' = 2x+p$

$$x^2 + px + q = E^2\left[1 + \left(\frac{x+\frac{p}{2}}{E}\right)^2\right]$$

$$Bx + C = \frac{B}{2}(2x+p) - \frac{Bp}{2} + C = \frac{B}{2}(2x+p) + D,\ \text{kus}\ D = C - \frac{Bp}{2}$$

$$x^2 + px + q = x^2 + 2\frac{p}{2}x + \left(\frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q = \left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + E^2,\ \text{kus}\ E^2 = q - \frac{p^2}{4} > 0$$

$$\int \frac{Bx+C}{x^2+px+c}dx = \frac{B}{2}\int \frac{2x+p}{x^2+px+c}dx + \frac{D}{E^2}\int \frac{dx}{1+\left(\frac{x+\frac{p}{2}}{E}\right)} = \frac{B}{2}\ln\left|x^2+px+c\right| + \frac{D}{E}\arctan\left(\frac{x+\frac{p}{2}}{E}\right) + C$$

Trigonomeetriliste avaldiste integreerimine.

Me vaatleme integraali

$$\int R(\sin x, \cos x)dx$$

1. Universaalne asendus

$$\tan\frac{x}{2} = t$$

$$\sin x = \frac{2\cos\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2}}{1} = \frac{2\cos\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2}} = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\cos = \frac{\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}}{1} = \frac{\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2}} = \frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$\frac{x}{2} = \arctan t \qquad x = 2\arctan t \quad dx = \frac{2}{1+t^2}dt$$

(27.1) $\tan\frac{x}{2} = t \qquad dx = \frac{2dt}{1+t^2} \qquad \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \qquad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$

2. Integraalid

$$\int R(\sin^2 x, \cos^2 x, \tan x, \sin x\cos x)dx$$

Kasutame asendust

$$\tan x = t \qquad dx = \frac{1}{1+t^2}dt$$

(27.2) $\sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}$

$$\cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}$$

$$\sin x\cos x = \tan x\cos^2 x = \frac{t}{1+t^2}$$

3. Integraalid

$$\int R(\sin x, \cos^2 x)\cos x dx$$

(27.3) $\sin x = t$

$$\cos x dx = dt$$

$$\int R(\sin^2 x, \cos x)\sin x dx$$

(27.4) $\cos x = t$

$$\sin x dx = dt$$

$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - t^2$$

Määratud integraal ja selle omadused. Keskväärtusteoreem (tõestusega).

Olgu $y = f(x)$ pidev lõigul $[a,b]$ Jaotame lõigu n osaks punktidega

(28.1) $x_0 = a,\ x_1, x_2, ..., x_n = b$

(28.2) $J = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ - lõigu $[a,b]$ jaotus

Igal lõigukesel $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ $i = 1,2,...,n$ võtame punkti $\xi_i = [x_{i-1}, x_i]$

Moodustame integraalsumma

(28.3) $S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$

Definitsioon 7.1 Funktsiooni $y = f(x)$ **määratud integraal**iks lõigul $[a,b]$ nimetatakse piirväärtust

(28.4) $\lim_{n\to\infty} S_n = \int_a^b f(x)dx$ $\quad \max|\Delta x_i| \to 0$

tingimusel, et piirväärtus eksisteerib.

Määratud integraali omadused

1. <u>Lineaarsus</u>

(28.5) $\int_a^b [\alpha f(x) + \beta g(x)]dx = \alpha\int_a^b f(x)dx + \beta\int_a^b g(x)dx$

2.

(28.6) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

3.

(28.7) $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

2. Keskväärtusteoreem

Kui funktsioon $f(x)$ on pidev lõigul $[a,b]$, siis leiduv vähemalt üks selline punkt ξ, mille korral kehtib valem

(28.8) $\int_a^b f(x)dx = \mu(b-a) = f(\xi)(b-a)$, kus $m \le \mu \le M$ ja $\xi \in [a,b]$

$m = \inf f(x) \quad x \in [a,b]$

$M = \sup f(x) \quad x \in [a,b]$

Et $m \le f(\xi) \le M$ ja $\xi \in [a,b]$,siis $\sum_{i=1}^{n} m\Delta x_i \le S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi)\Delta x_i \le \sum_{i=1}^{n} M\Delta x_i$

$\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = (x_1 - a) + (x_2 - x_1) + ... + (b - x_{n-1}) = b - a \qquad m(b-a) \le S_n \le M(b-a)$

Võtame piirväärtuse, kui $n \to \infty$ ja $\max|\Delta x_i| \to 0$, siis $m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$

Järelikult leidub $m \le \mu \le M$, et $\int_a^b f(x)dx = \mu(b-a)$

Kui $f(x)$ on pidev lõigul $[a,b]$, siis mistahes μ $(m \le \mu \le M)$ korral leidub vähemalt üks punkt, kus $f(\xi) = \mu$

Ülemised ja alumised integraalsummad ning nende omadused (tõestusega).

Tähistame,

(29.1) $$m_i = \inf f(x)$$ $$M_i = \sup f(x)$$

Määratud integraalsummad

(29.2) $\underline{S}_n = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i$ - alumine integraalsumma

$\overline{S}_n = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i$ - ülemine integraalsumma

On selge, et on täidetud võrratused

(29.3) $m(b-a) \le \underline{S}_n \le S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \le \overline{S}_n \le M(b-a)$

Lemma 8.1 Kui jaotusele J lisada üks täiendav punkt, siis alumine integraalsumma võib vaid kasvada ja ülemine integraalsumma vaid kahaneda.

(29.4) $$\underline{S}_n \le \underline{S}_n^{'}$$ $$\overline{S}_n \ge \overline{S}_n^{'}$$

<u>Tõestus</u>: Vaatleme näiteks $\underline{S}_n$

Olgu $J^{'}$ ühe punkti c lisamisega, mis asub lõigul $[x_{i-1}, x_i]$

Kõik…integraalsummat jäävad muutumatuks, välja arvatud $m_i \Delta x_i$, mis asendub lisamisega $m'_i \cdot \Delta x'_i + m''_i \cdot \Delta x''_i \ge m_i \cdot \Delta x'_i + m_i \cdot \Delta x''_i = m_i \cdot \Delta x_i$, sest $m'_i \ge m_i$ ja $m''_i \ge m_i$

Lemma 8.2 Mistahes ülemise ja alumise integraalsumma jaoks kehtib võrratus

(29.5) $\underline{S}_n \le \overline{S}_m$, kus $\underline{S}_n$ ja $\overline{S}_m$ on moodustatud suvalise jaotuse järgi.

<u>Tõestus</u>: Olgu $\underline{S}_n$ moodustatud jaotusega J_1 ja $\overline{S}_m$ jaotusega J_2

Me saame moodustada jaotuse J_3, mis sisaldab kõiki punkte nii jaotusest J_1 ja J_2

Vastavalt lemmale 8.1 saame $\underline{S}_n \le \underline{S}_k \le \overline{S}_n \le \overline{S}_m$

Lemma 8.3 Ülemistel ja alumistel integraalsummadel on piirväärtus, kui $n \to \infty$ ja $\max|\Delta x_i| \to 0$, ning need piirväärtused on võrdsed.

(29.6) $\lim_{n\to\infty} \underline{S}_n = \lim_{n\to\infty} \overline{S}_n = S$

<u>Tõestus</u>: Alumised integraalsummad $\{\underline{S}_n\}$ moodustavad mittekahaneva jada, mis on tõkestatud ülevalt konstandiga $M(b-a)$

Sellest järeldub, et eksisteerib piirväärtus $\lim_{n\to\infty} \underline{S}_n$ Analoogselt eksisteerib $\lim_{n\to\infty} \overline{S}_n$

Vaatleme suhet

$$\overline{S}_n - \underline{S}_n = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i - \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)\Delta x_i$$

Kui funktsioon on pidev lõigul, siis ta on ühtlaselt pidev sellel lõigul, s.t. et
$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$

$$|x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon, \ x_1, x_2 \in [a,b]$$

Järelikult $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$, et $|\Delta x_i| < \delta \Rightarrow |M_i - m_i| < \varepsilon$

$$i = 1,2,...,n$$

$$\overline{S}_n - \underline{S}_n \le \sum_{i=1}^{n} \varepsilon \Delta x_i = \varepsilon(b-a) \xrightarrow{b\to 0} 0$$

m.o.t.t.

Teoreem määratud integraali olemasolust (tõestusega).

Teoreem 1 Kui funktsioon $y = f(x)$ on pidev lõigul $[a,b]$, siis eksisteerib määratud integraal

(30.1) $$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \max \Delta x_i \to 0}} S_n$$

<u>*Tõestus*</u>: Kehtivad võrratused $m_i \le f(\xi_i) \le M_i \qquad \xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$

$$\underline{S}_n \le S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \le \overline{S}_n$$

$$\underline{S}_n = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i \qquad \overline{S}_n = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i$$

Kuna eksisteerivad piirväärtused

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ \max \Delta x_i \to 0}} \underline{S}_n = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \max \Delta x_i \to 0}} \overline{S}_n = S$$

Siis vastavalt "kahe politseiniku" teoreemile eksisteerib ka piirväärtus

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ \max \Delta x_i \to 0}} S_n = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \max \Delta x_i \to 0}} \sum_{i=1}^{\infty} f(\xi_i)\Delta x_i = S$$

Vastavalt integraali definitsioonile, see piirväärtus ongi määratud integraal $\int_a^b f(x)dx$

m.o.t.t.

Märkus: Saab näidata, et määratud integraal eksisteerib ka juhul, kui $f(x)$ on pidev kõikjal, v.a. loenduv või lõplik arv I liiki katkevuspunkte.

$$\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

Teoreem muutuva ülemise rajaga integraalist (tõestusega).

Newton-Leibnizi valem

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(u)du$$

Vaatleme muutuva ülemise rajaga integraali

$$\int_a^x f(t)dt = \Phi(x)$$

Teoreem 1 Olgu funktsioon $f(t)$ pidev lõigul $[a,b]$. Siis funktsioon $\Phi(x)$ on diferentseeruv ja seejuures tema tuletis

(31.1) $\Phi'(x) = f(x)$

Tõestus: Vastavalt definitsioonile

$$\Phi'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta\Phi(x)}{\Delta x}$$

$$\Delta\Phi(x) = \Phi(x+\Delta x) - \Phi(x) =$$

$$= \int_a^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt = \int_a^x f(t)dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt = \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt =$$

$$= f(\bar{x})(x+\Delta x - x) = f(\bar{x})\Delta x, \text{ kus } \bar{x} \in]x, x+\Delta x[$$

$$\Phi'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\bar{x})\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} f(\bar{x}) = f(x)$$

m.o.t.t.

Järeldus: $\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$ on funktsioon, mis vastavalt integraalarvutuse põhiteoreemile

$$\Phi(x) = F(x) + C$$

$$\int_a^x f(t)dt = F(x) + C$$

Kui $x = a$, siis $\int_a^a f(t)dt = 0$

Seega $F(a) + C = 0$

$$C = -F(a)$$

$$\int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a)$$

Võttes $x = b$, saame

(31.2) $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b$ (Newton-Leibnizi valem)

Märkus: $\int f(x)dx = F(x) + C$

Newton-Leibnizi valem (tõestusega).

Newton-Leibnizi valem

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(u)du$$

Vaatleme muutuva ülemise rajaga integraali

$$\int_a^x f(t)dt = \Phi(x)$$

Järeldus: $\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$ on funktsioon, mis vastavalt integraalarvutuse põhiteoreemile $\Phi(x) = F(x) + C$

$$\int_a^x f(t)dt = F(x) + C$$

Kui $x = a$, siis $\int_a^a f(t)dt = 0$

Seega $F(a) + C = 0$

$$C = -F(a)$$

$$\int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a)$$

Võttes $x = b$, saame

(32.1) $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b$ **(Newton-Leibnizi valem)**

Märkus: $\int f(x)dx = F(x) + C$

Ositi integreerimine ja muutuja vahetus määratud integraali korral.

Määratud integraali korral kehtivad valemid

(33.1) $\int_a^b uv'\,dx = uv\Big|_a^b - \int_a^b u'v\,dx$

(33.2) $\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f[u(t)]\cdot u'(t)dt$

$x = u(t) \qquad a = u(\alpha)$

$dx = u'(t)dt \qquad b = u(\beta)$

Määratud integraali rakendused (pindala, kaare pikkus, raskuskese).

1. Pindala arvutamine

(34.1) $S = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$

(34.1') $S = \int_c^d [s(y) - f(y)]dy$

Olgu joon antud parameetrilisel kujul

$$\begin{cases} x = u(t) \\ y = v(t) \end{cases}$$

$$S = \int_{x_1}^{x_2} ydx = \int_{t_1}^{t_2} y\overset{\circ}{x}\,dt$$

$$dx = \overset{\circ}{x}\,dt$$

Polaarkoordinaadid

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ u = \rho\sin\varphi \end{cases} \quad \rho \ge 0 \quad -\pi \le \varphi \le \pi$$

Joon polaarkoordinaatides

$$\rho = u(\varphi) \qquad \Delta S = \frac{1}{2}\Delta\varphi\rho^2$$

$$S \approx \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2}\rho_i^2\Delta\varphi_i \to \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \rho^2 d\varphi$$

(34.3) $S = \frac{1}{2}\int \rho^2 d\varphi$

2. Kõverjoone kaare pikkuse arvutamine

$$l = \sum_{i=1}^{n} \Delta l_i = \int_A^B dl$$

1) $y = f(x) \qquad a \le x \le b$

$$\Delta x^2 + \Delta y^2 = \Delta l^2$$

$$\Delta l = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta x}{\Delta y}\right)^2} \cdot \Delta x$$

$$dl = \sqrt{1 + y'^2}dx$$

(34.4) $l = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2}dx$

2) $x = g(y)$

(34.5) $dl = \sqrt{1 + x'^2}dy$

3) $\begin{cases} x = u(t) \\ y = v(t) \end{cases} \quad t_1 \le t \le t_2$

$$\Delta l = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2} \cdot \Delta t$$

$$dl = \sqrt{x^2 + y^2}dt$$

(34.6) $l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{x^2 + y^2}dt$

4) $\rho = u(\varphi) \qquad \alpha \le \varphi \le \beta$

$$\Delta l = \sqrt{\Delta\rho^2 + \rho^2\Delta\varphi^2} = \sqrt{\left(\frac{\Delta\rho}{\Delta\varphi}\right)^2 + \rho^2} \cdot \Delta\varphi$$

$$dl = \sqrt{\rho'^2 + \rho^2}d\varphi$$

(34.7) $l = \int_\alpha^\beta \sqrt{\rho'^2 + \rho^2}d\varphi$

3. Pöörkeha pindala ja ruumala

(34.8) $V = \int_a^b S(x)dx = \pi\int_a^b y^2 dx$

(34.9) $S = \int_a^b 2\pi y dl = 2\pi\int_a^b \sqrt{1 + y'^2}dx$

Pöörkeha ümber y - telje

(34.8') $V = \pi\int_c^d x^2 dy$

(11.9') $S = 2\pi\int_c^d x\sqrt{1 + x'^2}dy$